Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)

Rodolfo Vergel Causado

Doctorado Interinstitucional en Educación
Facultad de Ciencias y Educación
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá, Mayo de 2014

Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)

Rodolfo Vergel Causado

Director de tesis: Dr. Carlos Eduardo Vasco Uribe

Doctorado Interinstitucional en Educación
Facultad de Ciencias y Educación
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá, Mayo de 2014

Dedicatoria

A mi madre, quien siempre ha estado presente aun cuando no esté

A Myriam, por su tolerancia, comprensión, su amor y permanente apoyo

A mis hijos, Paula Alejandra, Santiago y Juan Sebastián, pues son el norte de mi existencia

Agradecimientos

A Bruno, amigo sincero, incondicional y crítico permanente

Al profesor Luis Radford, por sus enseñanzas, por haber permitido trabajar a su lado durante el tiempo de elaboración de la tesis y especialmente por haber compartido conmigo sus saberes en la pasantía doctoral en la Universidad de Laurentian, Sudbury, Canadá

Al profesor Carlos Eduardo Vasco, por su sabiduría, su orientación y crítica permanente que posibilitó cualificar mi formación

Al profesor Isaías Miranda Viramontes, por siempre estar dispuesto a escucharme y brindarme el espacio para discutir elementos claves de esta investigación doctoral

A los niños y niñas de la Institución Educativa Distrital Eduardo Umaña Mendoza

A la profesora Johanna Alexandra Villanueva, por su ímpetu en el trabajo con los niños y las niñas participantes de esta investigación

Contenido

Índice de figuras, diagramas y tablas

Introducción

La posibilidad de potenciar el desarrollo de pensamiento algebraico en los primeros años de escolaridad es un aspecto que cada vez genera mayor interés para la investigación en educación matemática. En particular, la generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela. Sin embargo esto demanda necesariamente desarrollar una perspectiva ampliada sobre la naturaleza del álgebra escolar, que considere una relación dialéctica entre las formas de pensamiento algebraico y las maneras de resolver los problemas sobre generalización de patrones, lo cual introduce un problema en términos de la constitución del pensamiento algebraico en alumnos jóvenes.

En este proceso de generalización de patrones debemos considerar que los actos de conocimiento por parte de los estudiantes incluyen diferentes modalidades sensoriales, tales como lo táctil, lo perceptual, lo kinestésico, etc., que llegan a ser partes integrales de los procesos cognitivos. Esto es lo que se ha llamado en el contexto internacional (Arzarello, 2006) la naturaleza multimodal de la cognición humana.

Estamos, pues, frente a la necesidad de reconocer todas aquellas situaciones discursivas (orales y escritas), gestuales y procedimentales que evidencien en los estudiantes intentos de construir explicaciones y argumentos sobre estructuras generales y modos de pensar, así sus argumentaciones y explicaciones se apoyen en situaciones particulares, o en acciones concretas. En términos epistemológicos, estamos sugiriendo que los modos de conceptualizar, conocer y pensar no pueden ser adecuadamente descritos solamente en términos de prácticas discursivas. Es importante considerar los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes movilizan cuando trabajan con ideas matemáticas. Estos recursos o modalidades incluyen comunicaciones simbólicas y orales así como dibujos, gestos, la manipulación de artefactos y el movimiento corporal (Arzarello, 2006; Radford, Edwards & Arzarello, 2009).

Asumimos como un problema didáctico la emergencia de formas de pensamiento algebraico en el contexto de las acciones a través de las cuales los alumnos expresan sus generalizaciones. Estas generalizaciones que producen los estudiantes podrían no ser tan sofisticadas (entendiendo lo sofisticado como expresiones en términos de signos alfanuméricos). Debemos reconocer que las formulaciones que expresan las generalizaciones de los alumnos pueden componerse de acciones, tales como gestos, ritmos, miradas, palabras, esto es, de formulaciones que se expresan y se despliegan en el espacio y el tiempo. Éstas han pasado desapercibidas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Consideramos que son elementos importantes en la constitución y manifestación del pensamiento matemático, por lo que se hace necesario detectarlas y analizar cómo emergen y evolucionan dentro de una serie de actividades de enseñanza y aprendizaje en el contexto de tareas sobre generalización de patrones.

De esta manera, el propósito de esta investigación es identificar y estudiar las formas de pensamiento algebraico temprano que emergen en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años) como resultado de su participación en la actividad matemática del aula, específicamente en torno a tareas sobre generalización de patrones.

Este trabajo lo hemos divididos en cinco capítulos. En el primero de ellos presentamos el planteamiento de nuestro problema de investigación. En concordancia con nuestro objetivo, exponemos la pregunta de investigación asociada con el desarrollo conceptual. En este sentido, la pregunta es posible de ser explorada en términos de la forma en que surgen y evolucionan nuevas relaciones entre el cuerpo, la percepción y el inicio del uso de símbolos a medida que los alumnos participan en actividades sobre generalización de patrones. La pregunta que orienta el estudio es: *¿Qué formas de pensamiento algebraico temprano emergen en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años), como resultado de su participación en la actividad matemática del aula, específicamente en torno a tareas sobre generalización de patrones?* A continuación abordamos los antecedentes de nuestro estudio. Por una parte presentamos el estado de conocimiento sobre el pensamiento algebraico y de otro lado describimos el estado de conocimiento sobre el proceso de generalización en la didáctica de las matemáticas.

El segundo capítulo lo dedicamos a desarrollar los elementos que conforman la fundamentación teórica del estudio. En esta dirección planteamos una idea de cultura y su importancia en los procesos de aprendizaje. La mediación semiótica desde la perspectiva de Vygotski y su influencia teórica sobre la interpretación acerca de cómo se desarrolla el pensamiento se constituyen en ideas claves dentro del cuadro teórico. Estas ideas nutren la teoría de la objetivación como una aproximación histórico-cultural, la cual asumimos como referente principal en nuestra investigación. En este sentido, hacemos una breve presentación de los inicios de esta teoría y planteamos algunas consideraciones filosóficas desarrolladas recientemente en el marco de esta perspectiva teórica. El gesto como medio semiótico de objetivación y las ideas de nodo semiótico y contracción semiótica son elementos teóricos que nos permite analizar la actividad matemática desarrollada por nuestros estudiantes. En este cuadro teórico finalizamos con los desarrollos sobre el pensamiento algebraico y la generalización algebraica de patrones. En particular, el pensamiento algebraico lo caracterizamos de acuerdo con Radford (2010b) a partir de tres elementos o vectores: el sentido de la indeterminancia, la analiticidad y la expresión semiótica.

En el Capítulo 3 proponemos nuestro diseño de la investigación, en el cual presentamos la fase de pilotaje, el diseño y la justificación de las tareas propuestas, así como la caracterización de la población. Describimos también la naturaleza de las sesiones de trabajo y los procesos de recolección de la información. En la parte final de este capítulo exponemos los elementos relacionados con la constitución de los datos y la descripción de cómo se hizo el análisis de los mismos.

El desarrollo de la investigación y el análisis multimodal de las producciones de nuestros estudiantes conforman el Capítulo 4. Finalmente, en el Capítulo 5 exponemos los resultados de nuestra investigación obtenidos del análisis multimodal de los datos, así como algunas observaciones finales que se derivan de este trabajo de tesis.

Capítulo 1
La Investigación

1.1Planteamiento del problema de investigación

Resultados de investigación enmarcados en la perspectiva semiótica-cultural de la educación matemática sugieren revisar los estudios sobre el desarrollo del pensamiento matemático en general y en particular las formas de pensamiento aritmético, algebraico y geométrico. Dichos trabajos (Arzarello & Edwards, 2005; Miranda, Radford & Guzmán, 2007; Arzarello, 2006; Radford & Demers, 2004; Radford, Bardini & Sabena, 2007; Radford, 2006a, 2006b, 2008a, 2008b, 2009, 2010a, 2010b, 2010c; Radford & Roth, 2010; Roth & Radford, 2011; Santi, 2010, 2011; D´Amore, Radford & Bagni, 2007) ponen en evidencia la necesidad de reconocer que, por ejemplo, las formas de pensamiento algebraico pueden ser exploradas en términos de la forma en que surgen y evolucionan nuevas relaciones entre el cuerpo, la percepción y el inicio del uso de símbolos a medida que los alumnos participan en actividades sobre generalización de patrones.

Los resultados de estas investigaciones indican que, en particular, las formas de pensamiento algebraico emergen en el aula de clase como consecuencia no sólo de las tareas propuestas, sino también de la naturaleza de la actividad.[1] Estos resultados sugieren que dentro de esta actividad se manifiesta la toma de conciencia (objetivación) de las formas históricas de pensamiento algebraico que objetivan los alumnos. La idea de

[1] La idea de actividad, en el sentido de Leontiev, según Radford (2004b), es un proceso social cuyo propósito es alcanzar un objeto impregnado de entrada con significados culturales y conceptuales; este objeto de la actividad se alcanza a través de acciones mediatizadas por sistemas semióticos depositarios de la historia cognitiva inscrita en estos últimos por generaciones pasadas. Esta idea será tematizada en el cuadro teórico de este proyecto, en el cual haremos la distinción, desde la epistemología hegeliana, entre tarea y actividad.

actividad nos obliga a considerar una concepción de semiótica,[2] en donde el pensamiento aparece de manera contextualizada.

Uno de los intereses actuales, según Radford, es la creación de actividades de clase que tengan una densidad epistemológica y propicien la interacción entre los estudiantes y entre estudiantes y profesor, en torno a tareas sobre generalización de patrones, que puedan ofrecer a los estudiantes la oportunidad de *reflejar su pensamiento algebraic*o (ver, por ejemplo, Radford, 2000, 2002, 2003, 2009; Radford & Demers, 2004; Radford, Bardini & Sabena, 2007). Se reconoce que en este proceso de manifestar su pensamiento algebraico, en general los estudiantes acuden necesariamente a maneras de referir lo indeterminado.

Vasco (2007) y Radford (2008a, 2008b, 2009, 2010a, 2010b, 2010c) ponen de manifiesto el interés de investigar sobre las formas como niños y niñas *refieren a lo indeterminado*, las formas de referir a la incógnita o variable, las cuales pueden ser lingüísticas y también corporales. Vasco (2007), apoyado en planteamientos de Austin (1962, 1975) y Searle (1969, 1979), sostiene que además de la sintaxis, en un enunciado (por ejemplo, de tipo algebraico como puede ser una fórmula algebraica) es necesario considerar su significado inmediato por la semántica y la intención ilocutiva del enunciador por la pragmática. Este autor llama la atención sobre la necesidad de analizar las dificultades de los estudiantes que aparecen por la sintaxis, la semántica y la pragmática del lenguaje, no sólo en los grados de secundaria (por ejemplo en 8° y 9°) sino desde los inicios de la escolaridad. En esta dirección Vasco (2007, p. 123) plantea que:

> Las dificultades introducidas por la sintaxis, la semántica y la pragmática del lenguaje aritmético-algebraico no aparecen sólo con la introducción del álgebra elemental en los grados octavo y noveno, pues están presentes desde el inicio

[2] La idea de signo en la psicología vygotskiana incluye: gestos, movimiento, algo escrito, lo oral, etc., lo cual sugiere nuestro posicionamiento en una perspectiva pragmática del significado, en tanto la mediación semiótica va más allá de adjudicarle a los signos el simple rol de representación del conocimiento. Los signos se convierten en los mediadores que permiten realizar la actividad reflexiva. El papel de representar, por lo general atribuido a los signos, es sustituido por un proceso más integral que Radford (2004, 2006b) llama *objetivación*.

> de la aritmética escolar en los primeros grados de primaria, y hoy día, aun en los últimos de preescolar.

Es necesario subrayar que estas dificultades parecen estar inscritas en las interacciones que se dan entre los tres aspectos del lenguaje (sintaxis, semántica y pragmática), más que en cada uno de ellos separadamente.

Socas (2011) informa que las orientaciones curriculares de Pre-Álgebra y de "Early-Algebra" se encuentran en una fase de desarrollo inicial en los tres ámbitos que caracterizan la Educación Matemática: epistemológico, cognitivo y didáctico. Sostiene, apoyado en los estudios de Mason (1996), Mason, Graham, Pimm & Gowar (1999), Mason, Burton & Stacey (1982), Carraher & Schliemann (2007), Kieran (2007) y Radford (1996), entre otros, que no hay todavía respuestas claras sobre qué tareas y formas de aprendizaje son algebraicas y cuáles no, y qué tipo de evidencias se necesitan para evaluar la presencia de pensamiento algebraico.

Un componente necesario de la generalización algebraica según Kieran (1989, 2006, 2007) es el uso del simbolismo algebraico para razonar sobre la generalización y expresarla. Según Kieran (1989, p, 165), "para una caracterización significativa del pensamiento algebraico no es suficiente ver lo general en lo particular, se debe ser capaz de expresarlo algebraicamente". El simbolismo algebraico es el lenguaje que da voz al pensamiento algebraico, "el lenguaje que expresa la generalidad" (Mason, 1996). No obstante, la naturaleza de dicho lenguaje puede ser diversa. Hay un desfase entre la habilidad de los estudiantes para reconocer y expresar verbalmente un cierto grado de generalidad y la habilidad para emplear la notación algebraica con facilidad. English & Warren (1998) sostienen que la parte más difícil es expresar algebraicamente las generalizaciones.

En relación con la naturaleza diversa del lenguaje aludida en el párrafo anterior y a partir de las sugerencias investigativas de Vasco (2007) y Radford (2008a, 2008b, 2009, 2010a, 2010b, 2010c) en relación con las formas como niños y niñas refieren a lo indeterminado y expresan la generalidad, estudios llevados a cabo por Radford (2008b, 2009, 2010a, 2010b, 2010c) han identificado una tipología de generalizaciones algebraicas. Dicha tipología (Factual, Contextual y Simbólica), "puede considerarse como ejemplos de formas de pensamiento algebraico" (comunicación personal, septiembre 15 de 2011). En este sentido, los medios semióticos de objetivación (gestos, movimiento, ritmicidad, artefactos, actividad perceptual, formas lingüísticas, etc.)[3] estratifican el objeto matemático en niveles de generalidad. Según este investigador, las formas de pensamiento algebraico (*Factual, Contextual y Simbólica*) constituyen un intento por comprender las actuaciones de los estudiantes a través de los medios semióticos de objetivación que movilizan, cuando se enfrentan a tareas en el contexto de la generalización de patrones. Los procesos de objetivación (Radford, 2009), en principio, son asumidos como los procesos sociales a través de los cuales los estudiantes capturan la lógica cultural con la que los objetos de saber han sido dados y se familiarizan con las formas de acción y pensamiento históricamente constituidas.

En la secuencia figural[4] presentada a continuación (Radford, 2010a), junto con los segmentos de entrevista y la secuencia de señalamientos realizados por Dan mostrada en la Figura 2, podemos apreciar producciones de este estudiante cuando aborda una tarea sobre secuencia figural (con apoyo tabular). Estas producciones ponen en evidencia cierta familiaridad con una forma de pensamiento algebraico; en este caso, la que llama este autor, Factual.

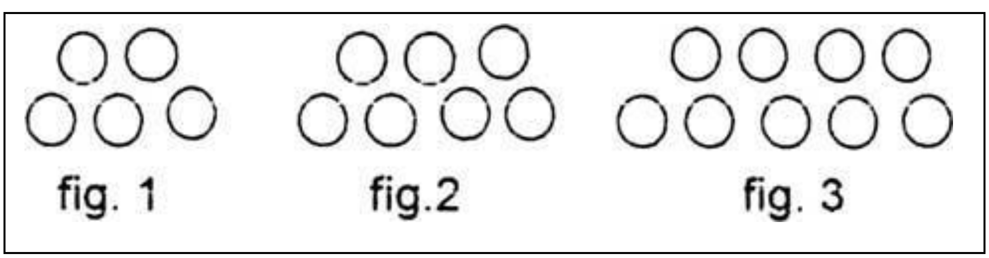


Figura 1. Secuencia figural con apoyo tabular presentada en Radford (2010a)

[3] La idea de medio semiótico de objetivación será desarrollada en el marco teórico de esta investigación. En particular, hacemos una caracterización teórica de la idea de gesto como medio semiótico de objetivación.
[4] Radford, en sus distintos trabajos de investigación, llama figurales a este tipo de secuencias. En esta investigación las llamaremos secuencias figurales con apoyo tabular, las cuales junto con las secuencias numéricas con apoyo tabular y secuencias puramente figurales y puramente numéricas serán abordadas en el Capítulo 3, Diseño de la investigación.

1. Dan: (*refiriéndose a la Figura 1*) Bien (…) [*señalando a la fila superior*] 2 en la parte superior; hay, hay 3 en la parte inferior (…).
2. Jimmy: [Figura] 2, hay 3; [Figura] 3, hay 4.
3. Dan: Espera un minuto. OK [*él hace una serie de gestos mientras habla; ver 4 de los 6 gestos en la Figura 2*], Figura 1, 2 en la parte de arriba. Figura 2, 3 en la parte de arriba. Figura 3, 4. Figura 4, 5.
4. Jimmy: Figura 10, será 11(…).
5. Dan: (…) 11 en la parte de arriba, y 12 en la parte de abajo.
6. Jimmy: Cada vez va a ser uno más en el aire.
7. Frank: [Figura] 100? 101, 102 (…).
8. Dan: 203.

Puede observarse cómo Dan hace una secuencia de señalamientos de gestos coordinados con palabras, en un primer proceso de objetivación.

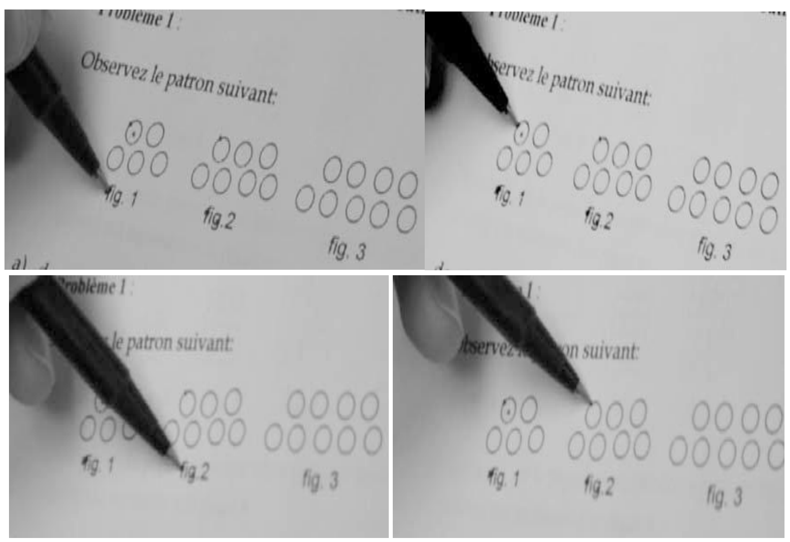


Figura 2. Secuencia de señalamientos realizados por Dan al abordar una tarea sobre secuencia figural con apoyo tabular

De manera preliminar consideramos tanto el pensamiento algebraico Factual como el pensamiento algebraico Contextual formas de acción y reflexión codificadas histórica y culturalmente (Radford, 2013a). Éstas se presentan como mera potencialidad. En el pensamiento algebraico Factual la generalidad se basa en acciones realizadas sobre números; las actuaciones constan aquí de palabras, gestos y de actividad perceptual. Por su parte, en el pensamiento algebraico Contextual la formulación algebraica es una descripción del término general (Radford, 2010a). El ritmo y los gestos se sustituyen por términos descriptivos claves, como por ejemplo, la respuesta de un estudiante de grado 9: *"# de la figura + 1 para la fila superior y el # de la figura + 2 para la parte inferior. Agregar los dos para el total".*

Una situación similar como la anteriormente descrita ha sido evidenciada en el contexto colombiano por el autor del presente trabajo de investigación. En el episodio presentado a continuación se muestran algunas acciones que evidencian la "actividad matemática" realizada por Paulita al interactuar tanto con Rodolfo como con la siguiente tarea sobre generalización de patrones (secuencia figural apoyada por representación tabular), en la que se requiere, inicialmente, calcular el número de bolitas en las posiciones 5 y 10.[5]

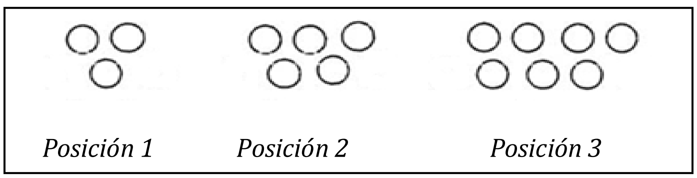


Figura 3. Secuencia figural con apoyo tabular presentada a Paulita

1. Rodolfo: ¿Cómo haces entonces para resolverlo?

2. Paulita: Entonces en la parte de arriba le sumo 1 (…) Si en la posición 1 hay 2 entonces en la posición 5 se le suma 1 o sea 6 y debajo le resto 1, que serían 5 bolitas, 5 bolitas [señala]. En la posición 10 al 10 le sumo 1 que serían 11 bolitas y abajo le resto 1 que serían 10 bolitas y ya.

3. Rodolfo: Mmmm ya, o sea ¿cómo haces para hacer la posición 7?, por ejemplo.

4. Paulita: Entonces serían 8 bolitas y 7 abajo [señala con el esfero].

5. Rodolfo: O sea ¿cómo es la relación?

6. Paulita: [Interrumpiendo] Arriba le sumo 1 y abajo le resto 1.

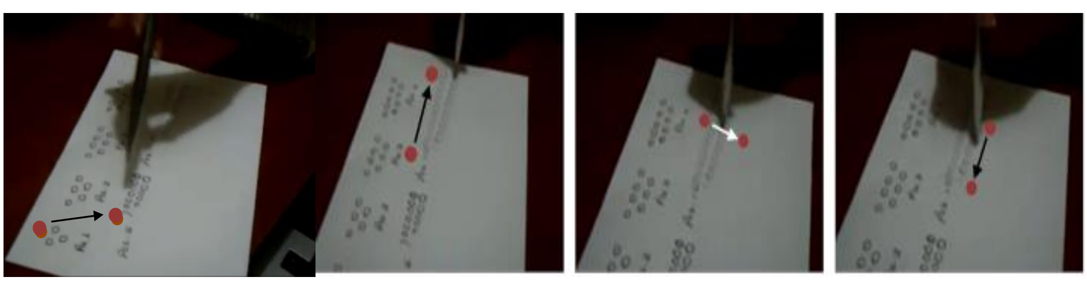


Figura 4. Paulita explica la regularidad percibida como sumar 1 arriba y restar 1 abajo, acompañando dicha explicación con movimientos del esfero

[5] El video se elaboró con el objetivo de corroborar algunas hipótesis que se tenían en este estudio. Se puede ubicar en el link http://www.youtube.com/watch?v=AQkeU5UYAv0

Las situaciones relacionadas con las inscripciones, el movimiento del esfero, la actividad perceptual, el ritmo, son elementos que nos están indicando que Paulita puede haber identificado el patrón, sin embargo aún no lo puede expresar algebraicamente; sólo puede enunciar la generalidad a través de una frase como se muestra en la línea 6 ("*Arriba le sumo 1 y abajo le resto 1").*[6] No obstante, es necesario considerar estas manifestaciones, pues desestimarlas es no reconocer prácticas semiótico-culturales presentes en la actividad matemática de Paulita. Ello implicaría desaprovechar todo un arsenal de *"aspectos matemáticos corpóreos"* que nos pueden estar brindando información importante sobre la emergencia de su pensamiento algebraico.

Los procedimientos y acciones que subyacen al significado que los estudiantes van elaborando en el proceso de identificar el patrón y expresarlo de alguna manera, como en los casos de Dan y de Paulita, sugieren, según Radford, que "lo matemático puede estar emergiendo a través del trasfondo histórico cultural de la interacción social" (comunicación personal, 22 de octubre de 2010). Esto es, en un contexto de enseñanza-aprendizaje las formas de interacción social ponen en funcionamiento elementos culturales que son constitutivos de la emergencia de ideas matemáticas.

Parece claro, entonces, que las "formulaciones" que expresan las generalizaciones de los alumnos, como en el caso de Paulita y de Dan, se componen de acciones, tales como gestos, ritmos, miradas, palabras (por ejemplo, líneas 1, 3 y 5 en la primera situación y líneas 2 y 4 en la segunda situación) por lo que sería más conveniente hablar de *fórmulas corporeizadas* (Radford, 2003, 2010a), esto es, fórmulas expresadas a través de acciones que se despliegan en el espacio y el tiempo.[7] De esta manera, recursos semióticos como hacer, tocar, mover, mirar (Arzarello, 2006) emergen como aspectos importantes en la constitución y manifestación del pensamiento matemático, por lo que se hace necesario, en términos de

[6]El doctor Bruno D´Amore informa el caso de niños que aportan evidencias, de un aula de clase de matemáticas, sobre la comprensión de la propiedad conmutativa de la adición en contextos que no incluyen letras. El carácter algebraico de tal situación no fue reconocido por el maestro que dirigía la clase (comunicación personal, abril 6 de 2011).

[7] En el marco de la presente investigación entendemos el término *corporeizadas* como sinónimo del término *corpóreas*.

investigación, detectarlos y analizar cómo emergen y evolucionan dentro de una actividad de enseñanza y aprendizaje en el contexto de tareas sobre generalización de patrones.

Las investigaciones de Radford sugieren continuar indagando otras formas de pensamiento algebraico provocadas por las situaciones matemáticas planteadas a los estudiantes. Si bien se dispone de ciertos resultados acerca de la emergencia del pensamiento algebraico en jóvenes estudiantes frente a tareas basadas en patrones figurales, se conoce muy poco o casi nada acerca de la emergencia del pensamiento algebraico y las dificultades de los estudiantes jóvenes ante tareas como las secuencias puramente numéricas o puramente figurales. La idea de explorar sistemáticamente y comparativamente el pensamiento algebraico en estos contextos, según Radford, parece muy importante para hacer avanzar la investigación en la educación matemática. Según este investigador,

> Conocemos muy poco sobre el pensamiento algebraico y, en particular, sabemos menos sobre el pensamiento algebraico en niños y jóvenes. La investigación en álgebra temprana comenzó hace apenas algunos años. El pensamiento algebraico es todavía muy general en su caracterización y requiere mucha más investigación. (Comunicación personal, 25 de marzo de 2011)

De esta manera, reconocemos un espacio para una zona conceptual donde los estudiantes pueden empezar a pensar en forma algebraica, aun cuando no estén recurriendo (o al menos no en gran medida) a los signos alfanuméricos del álgebra. Esta zona, que se ha denominado *zona de emergencia del pensamiento algebraico* (Radford, 2010b), se ha mantenido en gran medida ignorada como resultado de nuestra obsesión por el solo reconocimiento de los símbolos algebraicos.

La aparición de formas de pensamiento algebraico podemos considerarla, entonces, como un problema didáctico:

> Es todo ese fenómeno de aparición de formas de pensamiento el que tenemos que entender mejor. Y esto depende de la estructura de la clase en particular, de

la actuación del profesor, de la actividad de los alumnos, de los problemas que proponemos y el tipo de preguntas que planteamos, etc." (Comunicación personal, 3 de Octubre de 2011)

En particular, es materia de mayor investigación la evolución de las fórmulas corpóreas de los estudiantes hacia formas más sofisticadas, lo cual requiere, según Radford (2010c), un refinamiento de la actividad perceptual.
De situaciones como las referenciadas anteriormente, surgen interrogantes como:

- ¿Qué procesos de objetivación emergen en estudiantes de 9 y 10 años cuando se enfrentan a tareas sobre generalización de patrones?, ¿cómo poder identificarlos?
- ¿Cómo dichos procesos cambian según que la generalización se haga sobre secuencias puramente numéricas o secuencias numéricas apoyadas por representaciones tabulares o secuencias figurales con apoyo tabular o secuencias puramente figurales?[8]
- ¿Cuáles recursos semióticos (corporales, lingüísticos, simbólicos) resultan ser movilizados en los procesos de generalización de secuencias puramente numéricas en alumnos jóvenes (9-10 años)?[9]
- ¿Qué tipo de relaciones emerge dentro y entre los sistemas semióticos que están activos en el mismo momento y su dinámica de desarrollo en el tiempo?
- ¿Acaso muchos de los procedimientos que hacen nuestros niños y niñas y estudiantes jóvenes, sin usar letras, no podrían tipificarse como algebraicos?, ¿Por qué hemos desestimado este tipo de procedimientos?
- ¿Cómo vincular teóricamente el hecho de que los gestos, el movimiento, la actividad perceptual, la ritmicidad, son elementos consustanciales del pensamiento algebraico?

[8] Los términos secuencias puramente numéricas y secuencias numéricas apoyadas por representaciones tabulares se precisarán en el apartado de la metodología de este proyecto de investigación.
[9] A manera de conjetura, al parecer las secuencias figurales y las figurales con apoyo tabular ofrecen índices geométrico-espaciales que hacen movilizar en los estudiantes formas perceptivas y gestuales, formas que parecen no ser movilizadas, o por lo menos no con la misma intensidad, en el caso de las secuencias puramente numéricas.

Los interrogantes planteados, los cuales fueron surgiendo durante el proceso de construcción del problema de investigación así como en el proceso de comprensión de los constructos analíticos de la teoría cultural de la objetivación, comprometen necesariamente el desarrollo conceptual. Nuestra pregunta de investigación, que por supuesto también refiere al desarrollo conceptual, es posible de ser explorada en términos de la forma en que surgen y evolucionan nuevas relaciones entre el cuerpo, la percepción y el inicio del uso de símbolos a medida que los alumnos participan en actividades sobre generalización de patrones. De esta manera nuestro estudio está orientado por la siguiente pregunta:

> *¿Qué formas de pensamiento algebraico temprano emergen en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años), como resultado de su participación en la actividad matemática del aula, específicamente en torno a tareas sobre generalización de patrones?*

1.2 Antecedentes

1.2.1 Estado de conocimiento sobre el pensamiento algebraico. En esta dirección, los estudios e investigaciones han abordado el problema de la incorporación del Álgebra desde los primeros años escolares, no como una asignatura sino como una manera de pensar y actuar sobre objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, como guía hacia una enseñanza con comprensión y significado de las matemáticas, lo que se ha denominado la propuesta de cambio curricular Early-Algebra. En términos generales esta expresión (que hemos traducido como "Álgebra Temprana"), considera el Álgebra en una concepción amplia que abarca el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de relaciones funcionales, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, y la modelización (Kaput, 1998, 2000; citados en Socas (2011).

Esta perspectiva convoca a los docentes de todos los niveles a posibilitar en el trabajo de aula de matemáticas (Blanton & Kaput, 2005) la observación y descripción de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y propiciar un ambiente escolar en el que se valore que los estudiantes exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también practiquen habilidades de cálculo. En palabras de Kaput (2000) se trata de una “algebrización del currículo”, esto es, la integración del pensamiento algebraico en las matemáticas escolares. Comprende en definitiva la instrucción a alumnos de 6 a 12 años tanto del razonamiento algebraico como de las relaciones algebraicas.

La perspectiva “Álgebra Temprana” se diferencia de la de Pre-Álgebra, pues esta última prepara para el estudio del álgebra formal. La finalidad de Pre-Álgebra es facilitar la transición de la Aritmética al Álgebra, dadas las dificultades y los errores que tienen los alumnos en Álgebra, como consecuencia de un tratamiento insuficiente de lo aritmético y lo numérico en la Educación Primaria.

La ausencia de significado en el aprendizaje algebraico por parte de los estudiantes ya había sido advertido por Martin Kindt (1980, citado por Molina, 2006), quien frente a esta situación destaca tres grandes problemas de la enseñanza del álgebra, a saber:
- falta de atención a la generalización y al razonamiento
- un salto demasiado rápido al tratamiento formal del álgebra, y
- la falta de claridad en para qué y para quién es de utilidad el álgebra.

Kieran (1989) sugiere profundizar urgentemente en la investigación sobre la *naturaleza del pensamiento algebraico*. A partir de este llamado, surge una doble preocupación en la comunidad nacional e internacional. Por un lado, la preocupación se manifiesta en términos de la necesidad de analizar el proceso mediante el cual los alumnos de primaria elaboran generalizaciones, y por otro, el llamado a promover desde los primeros grados de la educación primaria el desarrollo del pensamiento algebraico.

Por su parte, los Estándares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) comparten esta visión multidimensional al distinguir como componentes del estándar de álgebra la comprensión de patrones, relaciones entre cantidades y funciones, la representación de relaciones matemáticas, el análisis de situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas, y el análisis del cambio.

Algunos estudios en el contexto colombiano en relación con dificultades en el aprendizaje del álgebra y sobre el significado que alumnos de grado 8 y 11 asignan al uso de las letras en álgebra (Pretexto, 1999; Agudelo-Valderrama, 2000; Agudelo-Valderrama & Vergel, 2009; Perry, Gómez, Castro, Valero & Agudelo, 1998; Bonilla, 1994) sugieren una necesidad imperiosa de profundizar en el estudio del currículo de esta área de las matemáticas. Además, los resultados de estudios internacionales como el TIMMS[10] muestran que los estudiantes colombianos no están desarrollando el pensamiento matemático que se construye a través del aprendizaje del álgebra.

Godino & Font (2000) prefieren hablar en términos del razonamiento algebraico. Señalan que este tipo de razonamiento implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas.

Kaput & Blanton (2001) proponen algebrizar las situaciones diseñadas para la enseñanza, lo cual abre la posibilidad de generar actividades que promuevan oportunidades para la búsqueda de regularidades, generalizaciones, justificaciones, reconocimiento de variaciones y formalizaciones. Por otro lado, sugieren identificar y apoyar los actos y contextos que promueven el razonamiento algebraico de los estudiantes, lo cual implica reconocer todas aquellas situaciones discursivas (orales y escritas), gestuales y procedimentales que evidencien en los estudiantes intentos de construir argumentos sobre estructuras generales, así sus argumentaciones se apoyen en situaciones particulares, o en acciones concretas.

En el contexto nacional, Vasco (2002) y MEN (1998, 2003) plantean el desarrollo del pensamiento variacional como construcción de estructuras conceptuales que fundamentan el estudio de la variación y el cambio, y por lo tanto es un pensamiento dinámico. Vasco y el MEN proponen que este tipo de pensamiento debe tener sus inicios en los primeros años

[10] El estudio TIMSS '*Third International Study in Mathematics and Science*' se llevó a cabo durante el período de 1991-1995, con la participación de 41 países. En este estudio participaron estudiantes colombianos de los Grados 7 y 8 y 11.

de la educación básica, fundamentalmente centrando la mirada en lo que podríamos llamar el estudio de las regularidades y patrones.

Carpenter y sus colegas (2003) han venido trabajando con un grupo de profesores para estudiar el desarrollo del razonamiento algebraico de los estudiantes en los grados primarios y la construcción de los enfoques de instrucción de apoyo en el desarrollo. Su trabajo con 100 maestros de escuelas primarias y de sus estudiantes en los grados 1º a 6º ha proporcionado las siguientes ideas: cuando los estudiantes hacen generalizaciones acerca de las propiedades de los números o las operaciones, hacen explícito su pensamiento matemático.

Carpenter señala que aunque los estudiantes tienen a menudo una gran cantidad de conocimiento implícito de las propiedades de las operaciones aritméticas, se reconoce que no se han examinado las generalizaciones acerca de las propiedades de los números y las operaciones o realizado un análisis sistemático sobre ellas. La clave para los educadores, señala el autor, es encontrar un contexto de instrucción en el que el conocimiento implícito de los estudiantes pueda explicitarse. En otro estudio, (Carpenter & Franke, 2001), se pone el interés en indagar por el proceso de generalización y de prueba y por la justificación de conjeturas.

Afirma Kieran (2004, p. 49) que el pensamiento algebraico en las primeras etapas del álgebra escolar "debe incluir el desarrollo de formas de pensar como el análisis de relaciones entre cantidades, la identificación de estructuras, el estudio del cambio, la generalización, la resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción".

Como lo señalan Lins & Kaput (2004), la mayoría de las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, durante las décadas de los 80 y 90, ponía el acento en estudiar los errores y dificultades que presentan los estudiantes (lo que los estudiantes no pueden hacer) cuando aprenden álgebra, debidos posiblemente al tipo de enseñanza recibida, razón que justificó posponer el estudio del álgebra para los últimos cursos escolares. Con la perspectiva de cambio curricular Álgebra Temprana, el énfasis recae en las posibilidades de hacer de los estudiantes y consecuentemente en las maneras de explotar su potencial de desarrollo matemático.

Blanton & Kaput (2005) analizan un estudio de caso de una maestra de tercer grado de primaria cuando intenta integrar el pensamiento algebraico en la práctica de aula. Los resultados sugieren que la maestra logró cierto éxito en integrar el razonamiento algebraico en la enseñanza de manera planificada y espontánea y ello condujo a cambios positivos en las destrezas y en el razonamiento algebraico de los estudiantes.

Kieran (2006) presenta una síntesis en la cual reporta cómo los temas en relación con la enseñanza y el aprendizaje del álgebra se han movido desde la transición de la aritmética al álgebra, variables e incógnitas, ecuaciones, solución de ecuaciones y problemas algebraicos de palabras (1977 al 2006), hasta los relacionados con el pensamiento algebraico en estudiantes de escuela primaria (mitad de 1990 al 2006), pasando por los temas relativos al uso de herramientas tecnológicas y un enfoque en múltiples representaciones y la generalización (mitad de 1980 al 2006).

Durante la última década la evidencia de la investigación se ha ido acumulando para indicar que muchos de los estudiantes tienen una comprensión muy pobre de las relaciones y las estructuras matemáticas que son la base de la representación algebraica. Dicha falta de comprensión no es un nuevo fenómeno algebraico: los estudios resumidos por Kieran, demuestran que el problema tiene su origen en la aritmética. De hecho, una parte importante de las dificultades de los estudiantes en álgebra se deriva precisamente de su falta de comprensión de las relaciones aritméticas.

Por tanto, la capacidad para trabajar de manera significativa en el álgebra, y así manejar las convenciones de notación con facilidad, requiere primero que los estudiantes desarrollen una comprensión semántica y pragmática de la aritmética. Una de las tareas de investigación es examinar cuestiones del reconocimiento de los estudiantes y el uso de la estructura y cómo este reconocimiento puede desarrollarse. Consecuentemente, una segunda tarea es utilizar esta información para idear nuevas actividades y entornos de aprendizaje para ayudar a los estudiantes en este desarrollo.

Molina (2006) estudia el uso y desarrollo de pensamiento relacional y de los significados del signo igual que estudiantes de tercero de primaria ponen de manifiesto en el contexto del trabajo con igualdades y sentencias numéricas. La investigación ilustra parte del potencial de la propuesta Álgebra Temprana, al llevarse a cabo una intervención de enseñanza que promueve la algebrización de la aritmética.

En Molina (2009), partiendo del constructo pensamiento relacional, la autora presenta resultados de un experimento de enseñanza, basado en el trabajo con sentencias numéricas, que ejemplifica el potencial de la propuesta de cambio curricular Álgebra Temprana. Estos resultados permiten evidenciar la capacidad de alumnos de tercer curso de educación primaria para trabajar en aritmética de un modo algebraico.

1.2.2 Estado de conocimiento sobre el proceso de generalización en la didáctica de las matemáticas. En el campo de la didáctica de las matemáticas se reconoce un interés por el estudio de los procesos de generalización. No puede desestimarse que el establecimiento de proposiciones, la resolución de problemas, el proceso de definir en matemáticas, la abstracción, entre otros procesos, requieren con mucha frecuencia de procesos de generalización. Como lo señalan Mason, Burton & Stacey (1982, p. 21), "la generalización es el verdadero nervio de la matemática". A continuación hacemos un breve recorrido, intentando mostrar el estado del arte de la cuestión.

Rubinstein (1966) sostiene que la generalización -relacionada con el pensamiento teórico- descubre las conexiones necesarias sujetas a la ley de los fenómenos y faculta para explicar las diversas manifestaciones de sus relaciones internas. Esto sería el material de base para afirmar que los distintos niveles del pensamiento se determinan por los tipos de generalización del material cognoscitivo. En otras palabras, señala Rubinstein, es necesario diferenciar distintos niveles del pensamiento en dependencia de lo alto que sea el nivel de sus generalizaciones y de la hondura con que a su vez del fenómeno a la esencia. En este trabajo establece cinco niveles de generalización, a saber:

Primer nivel: la representación singular de lo general, esto se refiere a cuando representamos los componentes de un conjunto de muchos o infinitos elementos mediante una determinada semiótica.

Segundo nivel: la generalización producto de una deducción.

Tercer nivel: la generalización por extensión de un concepto, esto es cuando se pasa de un concepto a otro más general, pero que mantiene los rasgos esenciales del primero.

Cuarto nivel: la generalización se logra mediante un cambio del problema con el que se trabaja, aunque manteniéndose en el mismo modelo.

Quinto nivel: la generalización con desarrollo de un nuevo modelo.

Krutetzki (1976, citado por García, 1998) señala la habilidad para generalizar algún contenido matemático (objetos, relaciones y operaciones) y distingue dos niveles: la habilidad personal para ver algo general y conocido en lo que es particular y concreto (someter un caso particular a un concepto general conocido) y la habilidad para ver algo general y todavía desconocido en lo que es particular y aislado (deducir lo general a partir de casos concretos para formar un concepto).

Para un alumno, sostiene Krutetzki, una cosa es ver la posibilidad de aplicar una fórmula conocida a un caso particular y otra cosa es deducir una fórmula desconocida a partir de casos particulares. En su investigación Krutetzki diseñó materiales para estudiar la habilidad mostrada por los alumnos en el segundo de los niveles de generalización del contenido matemático a partir del proceso de inducción finita. Como resultados se distinguieron cuatro niveles de habilidad para generalizar entre alumnos que poseen diferentes capacidades para las matemáticas.

Nivel 1. No generaliza material respecto de atributos esenciales, ni siquiera con la ayuda del experimentador y después de realizar un número de ejercicios prácticos intermedios del mismo tipo.

Nivel 2. Generaliza material respecto de atributos esenciales con la ayuda del experimentador y después de realizar un número de ejercicios prácticos del mismo tipo, mostrando errores e imprecisiones.

Nivel 3. Generaliza material respecto de atributos esenciales por sí mismo, pero después de varios ejercicios del mismo tipo con errores insignificantes. Es capaz de realizar generalizaciones libres de error por medio de indicaciones y preguntas insignificantes hechas por el investigador.

Nivel 4. Generaliza material correctamente e inmediatamente, sin experimentar dificultades, sin ayuda por parte del experimentador y sin una práctica especial en resolver problemas del mismo tipo.

En el campo de la resolución de problemas, atendiendo a las características de sus resoluciones, Krutetzki (1976, citado por García, 1998) estableció que los estudiantes se podían clasificar en tres grandes grupos:

- *El visual o geométrico,* compuesto por aquellos individuos dotados de una habilidad especial para interpretar visualmente relaciones matemáticas abstractas y caracterizados por su persistencia en el uso de esquemas visuales incluso cuando los problemas se pueden resolver fácilmente desde otros enfoques.
- *El no visual o analítico,* formado por estudiantes que no tienen necesidad de recurrir a ningún tipo de soporte visual para trabajar con esquemas abstractos.
- *El intermedio o armónico,* integrado por aquellos alumnos en los que se da un equilibrio entre las aproximaciones visuales y analíticas en la resolución de problemas.

Davydov (1981), en su obra "Tipos de generalización en la enseñanza", aborda algunos problemas fundamentales de la pedagogía partiendo de posiciones filosóficas marxista-leninistas tales como los problemas de la generalización en la psicología y en la didáctica tradicionales, la esencia gnoseológica de la teoría de la generalización y la formación de los conceptos aceptados en las ciencias antes mencionadas. En particular cabe destacar dos grupos esenciales de fenómenos con los que comúnmente se halla relacionado el término generalización. En primer lugar, se tiene el *proceso*[11] de generalización, esto es, el tránsito

[11] Énfasis en el original.

del niño de la descripción de propiedades de un objeto individualizado a su hallazgo y separación en toda una clase de objetos similares (Davydov, 1981, p. 13). Por otro lado, señala Davydov (1981. P.13) "al caracterizar el *resultado*[12] de este proceso se advierte la facultad que tiene el niño de abstraerse de ciertos rasgos particulares y variables del objeto".

Dorfler (1991) sostiene que una acción se debe entender en sentido tan amplio como sea necesario. Incluso las más puras operaciones matemáticas deben considerarse como acciones, debido al carácter cíclico del proceso de generalización. En la formación de un concepto matemático, en un nivel elemental, una acción puede consistir en agrupar objetos materiales determinados y en otro nivel superior dentro del mismo concepto, la acción puede tomar el sentido de operación matemática de ordenar o sumar, actuando sobre elementos abstractos. Dorfler contempla tres procesos generales dependiendo cada uno del centro de interés:
(i) El centro de interés es el esquema de la acción, forma general del proceso.
(ii) Las condiciones para la plausibilidad de las acciones, formuladas como relaciones entre objetos o como propiedades de los objetos.
(iii) El producto o resultado de las acciones.

Azarquiel (1993, p. 27) señala que "la generalización en muchas ocasiones lleva consigo un proceso de abstracción de orden elevado, de cierta dificultad". Ver y expresar los aspectos generales tiene interés en sí mismo, como una potente actividad intelectual que se pone en juego en muchas ocasiones, pero es además una capacidad que puede desarrollarse (Azarquiel, 1993, p. 27).

Sin embargo, generalizar no es sólo pasar de una colección de casos particulares a una propiedad común, a una expresión que las englobe, ni tampoco es sólo definir, a partir de las propiedades de un objeto. Azarquiel sostiene que también se generaliza cuando se transfieren a una situación propiedades que se cumplen en otra, y, en general, cuando se amplía el ámbito de definición de una ley. El proceso de generalización se constituye en un

[12] Énfasis en el original.

proceso matemático complejo. Ahora bien, los procesos de generalización relacionados con el álgebra permiten una división en fases que conviene también desde el punto de vista didáctico. Azarquiel considera que el proceso de generalización requiere tres pasos bien diferenciados, a saber: la visión de la regularidad, la diferencia, la relación; su exposición verbal; y su expresión escrita, de la manera más concisa posible.

Para Mason (1996) la generalización es el corazón de las matemáticas y consiste tanto en ver los casos particulares en la generalidad como en ver la generalidad a través de los casos particulares. Mason sostiene que la generalización es un proceso complejo. En su trabajo es central la preocupación por sensibilizar a los alumnos respecto del tipo de generalización que supone la actividad matemática y plantearles un juego permanente y dual, entre generalización -y especialización (particularización), como aspectos que constituyen el objetivo central de la enseñanza de la matemática. El autor reconoce que hay algo específico de esta disciplina dado por la naturaleza de los objetos sobre los que se generaliza y por la manera en que se justifica la generalización.

En el trabajo doctoral de García (1998) es fundamental el concepto piagetiano de *abstracción reflexiva* o reflectora, esto es, la abstracción que parte de las acciones u operaciones y no meramente de los objetos. La abstracción reflexiva conlleva dos momentos indisolubles: un *proceso de reflexión*, 'reflejamiento' o proyección que hace pasar lo que es abstraído de un plano inferior a otro superior (por ejemplo de la acción física a la representación mental) y un *producto de la reflexión*, una 'reflexión' en el sentido mental, que permite una reorganización o reconstrucción cognitiva, sobre el nuevo plano de la que ha sido extraído del plano precedente.

En el plano inferior las acciones y operaciones se realizan sobre objetos concretos, físicos o imaginados, mientras que en el plano superior las acciones y operaciones interiorizadas actúan sobre objetos abstractos y las coordina para formar nuevas acciones que dan lugar a nuevos objetos. Siendo así, el sujeto reconstruye lo así abstraído en un plano superior nuevo, cuyo funcionamiento es distinto y tal reconstrucción conduce a un esquema cognitivo más general. García, apoyado en los elementos teóricos de Piaget, señala que la abstracción reflexiva consiste en traducir una sucesión de actos materiales en un sistema de operaciones interiorizadas cuyas leyes o estructura se comprenden en un *acto simultáneo*.

García (1998) aporta evidencias del desarrollo del proceso de generalización en estudiantes de secundaria cuando se enfrentan a problemas de generalización lineal. El autor persigue en su tesis, por un lado, estudiar el proceso de generalización, más específicamente, determinar las acciones que los alumnos realizan y los invariantes que establecen al abordar las tareas denominadas problemas de generalización lineal. Por otro lado, se interesa en derivar orientaciones para la práctica educativa en el nivel de enseñanza secundaria.

Según García, el término problemas de generalización lineal[13] —término introducido por Lee & Wheeler (ver Stacey, 1989)— es muy común en la literatura didáctica de origen anglosajón. Son problemas con las siguientes características: mediante dibujos que figuran en el enunciado, se dan varios objetos de diferentes tamaños ($n = 1, 2, ...$), los cuales tienen un número$f(n)$ de elementos; de esta forma se dan los primeros términos $f(1), f(2), f(3), ...$ de una progresión aritmética $f(n) = an + b, b \neq 0$, y se piden algunos términos $f(n)$. *Cuando* n es pequeño" se hablará de *generalización próxima* y cuando n es "grande" de *generalización lejana*. En esta clase de problemas aparece la *pauta lineal*. Como guía y evaluación de la actuación de los alumnos en las sesiones de aula y en las pruebas escritas, García planteó unas categorías referidas a la comprensión del contenido matemático (CM):

CM-1: Reconocer la diferencia constante, carácter iterativo de la pauta lineal.
CM-2: Expresar la relación para un cálculo.
CM-3: Extender tal relación a otros cálculos dentro de un mismo problema.
CM-4: Expresar verbalmente con relación a la sucesión la validez de la regla para un cálculo.
CM-5: Expresar verbalmente con relación al dibujo la validez de la regla para un cálculo.
CM-6: Utilizar datos disponibles para validar una expresión para el cálculo.
CM-7: Construir datos para validar la expresión para un cálculo.

[13] Conviene hacer aquí una precisión, pues lo que se denomina con el término "lineal", corresponde con una función afín, mientras que lo que se denomina "de proporcionalidad directa" corresponde a una función lineal en la terminología matemática habitual.

CM-8: Distinguir una regla para el cálculo con diferencia constante de otra sin diferencia constante.
CM-9: Simbolizar mediante expresiones literales la regla para el cálculo.
CM-10: Simplificar la regla para el cálculo.
CM-11: Expresar acciones sobre la sucesión que podrían ser la génesis de una regla para el cálculo dada.
CM-12: Expresar acciones sobre el dibujo que podrían ser la génesis de una regla para el cálculo dada.

Stacey (1989, citado por García, 1998) estudia los métodos y la consistencia en el uso del método, utilizados por alumnos de edades comprendidas entre los 9 y 13 años, en problemas de generalización lineal. Entre los principales hallazgos del trabajo de Stacey se encuentra la clasificación de los métodos utilizados por los estudiantes en las siguientes categorías:
Recuento: Contar directamente sobre un dibujo o construir la sucesión correspondiente hasta el término requerido.
Diferencia: Se asume de forma implícita que la adición repetida implica que $f(n) = an$
Whole-object[14]*:* Se asume implícitamente que $f(mn) = mf(n)$.
Lineal: Utilización de una pauta lineal, es decir, se reconoce que tanto las operaciones de suma y multiplicación están involucradas y que, además importa el orden en que se realizan las operaciones. Se asume implícitamente que $f(n) = an + b, b > 0$.

Un resultado importante reportado en el trabajo de Stacey hace referencia a que los alumnos más experimentados muestran, en su explicación escrita, cierta relación entre la pauta numérica y la pauta espacial, es decir, se nota una cierta influencia del dibujo en el desarrollo de la estrategia por los alumnos.

En dos estudios elaborados por Orton & Orton (1994, 1996, citado por García, 1998) se utilizan mayoritariamente problemas con pautas lineales y cuadráticas, acompañados también de diagramas ilustrativos. Los objetivos eran proporcionar evidencia sobre

[14] Objetual-global

habilidades y competencias mostradas por los sujetos en situaciones con pautas, además de señalar algunos obstáculos para tales habilidades y competencias.

Las conclusiones del primero de los estudios sugieren que la generalización tiene lugar a más de un nivel: algunos sujetos son capaces de utilizar métodos generalizables para calcular los términos de una sucesión particular, pero sus habilidades no les permiten extender tales métodos a las siguientes sucesiones. Sin embargo, otros sujetos sí muestran tal habilidad. Con respecto a la relación entre n y $f(n)$, algunos estudiantes muestran un nivel de generalización que sólo les permite aportar soluciones numéricas, otros son capaces de resumir relaciones utilizando palabras y pocos fueron capaces de convertirlas en formas algebraicas reconocibles. Uno de los estudios contemplados en este primer trabajo se realizó con estudiantes de edades comprendidas entre los 9 y 13 años. En él se utilizó material concreto, "palillos", y se esperaba que el manejo de tal material en la experiencia, serviría de ayuda a los alumnos. No obstante, el estudio muestra que una vez que los números asociados a los diagramas se hicieron explícitos, los alumnos abandonaron el trabajo con el material concreto y se concentraron en las pautas puramente numéricas.
En este primer trabajo (Orton & Orton, 1994) se señala un intento de definir diferentes habilidades de generalizar. Por un lado, la *extensión de la generalidad* como el empleo de un método correcto de generalización dentro de una tarea y en diferentes tareas. De otra parte, la *expresión de la generalidad* de tres formas distintas, desde las simples estructuras de los cálculos hasta las expresiones algebraicas, pasando por la formulación con palabras de las relaciones encontradas. En el segundo trabajo (Orton & Orton, 1996) se abandonan los formatos pictóricos y mediante tareas contextualizadas, que conllevan pautas lineales y cuadráticas, se definen unos estadios y niveles en el desarrollo de las habilidades de generalización en alumnos de edades entre 10 y 13 años.

El estudio llevado a cabo por Pretexto (1999) caracteriza la variable como problema puntual en matemáticas, sugiere algunas actividades que posibilitarían, de acuerdo con la orientación dada por el profesor, el desarrollo de procesos de generalización y simbolización. Los hallazgos de este Grupo ponen en evidencia que la variable (Pretexto, 1999, p. 83): (i) pertenece siempre a un universo, y desde él debe ser interpretada; (ii) el significado de variar que se le adjudica, corresponde al hecho que ella es representación, indistinta y simultánea, de los distintos individuos que conforman su universo; (iii) aparece siempre haciendo parte de una expresión, que da cuenta de la relación de dependencia que se desea destacar entre los individuos de su universo; (iv) el universo al que pertenece, sin ser tiempo, está implícitamente connotado de éste. En otras palabras, el tiempo se imbrica al universo de la variable, ajustándose a su cardinalidad y a su estructura.

Para Calvo (2001) no existen elementos que distingan los procesos involucrados cuando un sujeto está desarrollando actividad matemática, en procesos avanzados y procesos elementales. Abstracción, análisis, categorización, conjeturación, definición, generalización, formalización, demostración, son procesos que no están confinados en la etapa avanzada de las matemáticas, lo que varía de una a otra es el peso y la frecuencia de su uso. Calvo, en su tesis doctoral, justifica la importancia de desplegar un trabajo en procesos como el de generalización, lo cual producirá más adelante, en la etapa secundaria y universitaria, el abordaje comprensivo de ideas matemáticas.

Galperín (1959, citado por Montealegre, 2005), en su teoría y método de “la formación de acciones mentales”, diferencia cinco niveles de formación de la acción:
- *la base orientadora de la acción*, es decir, las necesidades, los motivos y las tareas
- *apoyo de la acción en objetos materiales* (dibujos, diagramas, cálculos)
- *la acción basada en el lenguaje hablado social con apoyo de las representaciones gráficas*
- *la acción conducida por el lenguaje externo, sin apoyo en objetos,* esto es, el habla se utiliza en la ejecución de la tarea, por lo que la acción debe ser desplegada y no abreviada
- *la acción se realiza en el plano menta*l, es decir, la acción se transforma en representación mental.

Montealegre (2005) refiere el trabajo de Galperín (1959) quien considera que la calidad de la acción mental es alta si existe mayor generalización, abreviación y dominio. La generalización de una acción significa distinguir entre sus diversas propiedades, aquellas necesarias para ejecutarlas adecuadamente. La abreviación permite formar la nueva noción o concepto de la realidad, por medio de la retención de los contenidos de la acción y del logro de un movimiento de orientación basado en relaciones objetivas. El dominio ocurre sólo en el curso de la acción; lo importante es poder discernir lo fundamental y lograr una internalización de las operaciones o del procedimiento en forma abstracta.

Kieran (2006), en relación con los trabajos que consideran el álgebra como actividad de generalización, reporta algunas investigaciones pioneras del PME (Psychology of Mathematics Education) en relación con el uso de la notación algebraica como una herramienta para la expresión de lo general y de patrones de figuras. A continuación describimos los reportes realizados por Kieran (2006).

Lee (1987) y Lee & Wheeler (1987) encuentran que pocos estudiantes usan álgebra o aprecian su papel en justificar un enunciado general acerca de números. Similares hallazgos han sido reportados por MacGregor & Stacey (1993), quienes identifican una dificultad en los estudiantes la cual reside en su incapacidad para articular claramente la estructura de un patrón o relaciones usando lenguaje ordinario. Arzarello, Bazzini & Chiappini (1994) encuentran que estudiantes que pudieran expresar los elementos de un problema mediante el uso de lenguaje natural fueron incapaces de expresarlos en lenguaje algebraico.

En el trabajo de Healy & Hoyles (1999) se pone de manifiesto que la aproximación visual en tareas de generalización utilizando patrones de cerillos puede proporcionar un gran soporte para la representación algebraica de secuencias, aporta elementos para desarrollar marcos conceptuales para el trabajo con funciones y subraya la necesidad de un trabajo fuerte para conectar patrones numéricos observados con la forma simbólica.

Ainley, Wilson & Bills (2003) compararon la generalización de contexto (asociada con los patrones figurales) con la generalización de cálculo (referida a las relaciones entre los números en una secuencia numérica) y encontraron que la generalización del contexto no parece ser suficiente apoyo a los niños para moverlos a una versión simbólica de la regla. Radford (2000), quien ha estudiado la transición de lo particular a lo general ha argumentado que tal proceso toma tiempo. Garuti, Boero & Lemut (1998), en un estudio que incluyó problemas del tipo "Pruebe que la suma de dos números impares consecutivos es un múltiplo de 4", encontraron que los estudiantes necesitaron aprender gradualmente cómo explorar y transformar el enunciado dado para construir una prueba.

El trabajo de Sasman, Olivier & Linchevski (1999) indaga sobre el papel de las representaciones tabulares con actividades de generalización en las que se variaron el tipo de función, la naturaleza de los números, el formato de las tablas y la estructura de las imágenes. Los resultados mostraron que variar estos elementos tuvo poco efecto en el pensamiento de los estudiantes.

En el estudio realizado por Talizina (2008), se presenta la consideración de diferentes aproximaciones hacia el estudio del problema de la generalización. En el trabajo se analiza la dependencia de las características particulares sometidas a la generalización, de su lugar en la estructura de la actividad del sujeto. En el estudio se incluyeron dos grupos de niños de 5 años a 6 años y 9 meses de edad. El primer grupo estuvo integrado por niños con desarrollo intelectual normal, mientras que el segundo grupo lo integraron niños con retardo del desarrollo intelectual. Los resultados muestran que la generalización se da solamente de acuerdo con aquellas características de los objetos que se incluyen en el contenido de la base orientadora de la acción. Esta orientación incluye las necesidades, los motivos y las tareas. El propio objeto de la actividad se presenta al sujeto como capaz de satisfacer determinada necesidad. Talizina muestra que la generalización no se determina por los objetos, sino que se mediatiza por la actividad del sujeto con estos objetos, a la vez que considera las aproximaciones básicas que se utilizan en los estudios sobre la generalización, a saber:
Primera aproximación: se dirige la atención principalmente a las características de los objetos reales, de acuerdo a las cuales se da la generalización: desde el punto de vista de su naturaleza física, su significado en la solución de problemas, etc.
Segunda aproximación: se enfatiza el estudio del papel de diversos factores en el proceso de generalización: el papel de la palabra y el papel de variaciones en las características irrelevantes.

Bruner y Austin (1956, citados por Talizina, 2008), identifican una serie de condiciones que influyen en la actividad que conduce a la generalización: las particularidades de la comprensión del problema al que se enfrenta el sujeto; el carácter de los ejemplos que encuentra en el proceso de generalización; las consecuencias esperadas de las acciones que realiza; el carácter de las limitaciones que se presentan durante la actividad del sujeto; las particularidades de la valoración de las acciones que se realizan.

En relación con los trabajos de investigación que estudian las condiciones que influyen de manera positiva sobre la actividad de la generalización, se encuentra que es fundamental el análisis de la dependencia del proceso de la generalización, de las partes estructurales y funcionales de la acción del sujeto. Así, los datos de Zaporozhets, Zinchenko & Elkonin (1964), y Poddyakov (1977), citados por Talizina (2008), establecieron que el proceso de generalización es dependiente del carácter de las acciones de orientación que se dirigen a los objetos que se generalizan.

Los estudios e investigaciones llevados a cabo por Radford desde la perspectiva-semiótica cultural (1996, 1997, 2000a, 2000b, 2002, 2003, 2004, 2004a, 2004b, 2005a, 2005b, 2006a, 2006b, 2008a, 2008b, 2010a, 2010b, 2010c, 2012a) sugieren profundizar los procesos de generalización algebraica en estudiantes jóvenes. En estas investigaciones se abordan secuencias figurales apoyadas por representaciones tabulares y secuencias numéricas también con apoyo tabular. En términos generales, es importante destacar que la generalización es una actividad no exclusiva de las matemáticas, caracteriza todas las formas de conocimiento científico y no científico. Sin embargo, en matemáticas consiste en alcanzar esquemas generales de pensamiento. Radford (1996) plantea que la generalización es un procedimiento que lleva a una conclusión que, posteriormente, hay que validar, a partir de una sucesión de hechos observados. De esta manera, todo proceso de generalización conlleva una fase de validación.

Más adelante el mismo autor (Radford, 2005b) señala que generalizar significa observar algo que va más allá de lo que realmente se ve. Ontogenéticamente hablando, este acto de percibir se desarrolla a través de un proceso durante el cual el objeto por ser visto emerge progresivamente. Los objetos y signos utilizados para objetivar el saber son, lo que ha denominado Radford, *medios semióticos de objetivación*.

1.2.3 Una síntesis preliminar. Esta revisión sobre el pensamiento algebraico y la generalización en la didáctica de las matemáticas muestra un horizonte de estudios e investigaciones que han abordado estos aspectos. Se observa, por ejemplo, que varias de estas investigaciones se han ocupado de errores de los estudiantes en el dominio de la sintaxis algebraica; otras por su parte plantean sugerencias de cambio curricular que proponen actividades didácticas para desarrollar el pensamiento algebraico. El problema de indagar sobre la "anatomía" del proceso de generalización y específicamente sobre el proceso de generalización de patrones está vinculado con la idea de pensamiento algebraico.

Es necesario señalar que si bien se dispone ya de ciertos resultados acerca de la emergencia del pensamiento algebraico en jóvenes estudiantes frente a tareas basadas en patrones figurales (e.g., los trabajos abundantes de Radford, 2003, 2004, 2004a, 2004b, 2005a, 2005b, 2006a, 2006b, 2008a, 2008b, 2010a, 2010b), se conoce muy poco o casi nada acerca de la emergencia del pensamiento algebraico y las dificultades de los estudiantes jóvenes ante tareas como las secuencias puramente figurales y puramente numéricas. Más aún, en términos del profesor Radford, la investigación debería ofrecer aportes en relación con discusiones epistemológicas sobre las generalizaciones observadas en secuencias numéricas y ahondar en la comparación de formas de pensamiento algebraico que podrían emerger de tareas basadas en secuencias no figurales y figurales.

Todavía no hay una definición concisa del pensamiento algebraico y ello puede muy bien deberse a la amplia gama de objetos algebraicos (por ejemplo, ecuaciones, funciones o patrones) y los procesos y las *distintas formas posibles de concebir pensamiento en general*. La tarea de caracterizar el pensamiento algebraico es todavía ardua. Se han planteado muchas discusiones en torno al tema. Luis Radford, incluso, llama la atención sobre los debates celebrados en los años 1980 y 1990 (Radford, 2010a), en los cuales era imposible ponerse de acuerdo sobre un conjunto mínimo de características sobre este tipo de pensamiento.

La revisión de investigaciones aquí presentada coincide con la apreciación de Radford. Según este autor estas investigaciones condujeron a una pregunta inevitable y difícil que se plantea una y otra vez: *el de la naturaleza del pensamiento algebraico*. No obstante, hay un consenso más o menos general en torno a dos aspectos: (i) el álgebra trata de objetos de una naturaleza indeterminada, como incógnitas, variables y parámetros, y (ii) en el álgebra los objetos se tratan en forma analítica, lo cual se traduce en que en álgebra se hacen cálculos con cantidades indeterminadas -es decir, sumar, restar, dividir, etc., incógnitas y parámetros- como si se conocieran, como si fueran números específicos.

Si bien el MEN (2006) sugiere abordar la idea de pensamiento variacional como el estudio de la variación y el cambio, el estudio de las regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente, al parecer, estos elementos hacen parte de la idea de pensamiento algebraico, que sin embargo nos parece todavía muy general en su caracterización. Por ejemplo, el MEN (2006) presenta sugerencias de actividades para desarrollar el pensamiento variacional desde los primeros niveles de la Educación Básica Primaria:

> Analizar de qué manera cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; procurar expresar ese término, o mejor los dos o tres términos siguientes, oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas. (MEN, 2006, p. 67)

Este gran reto que impone tanto el MEN como los resultados de las investigaciones y estudios aquí revisados, sugiere indagar con mucho más cuidado elementos que, nos parece, han estado presentes, tales como: *pensamiento, pensamiento algebraico, actividad,* *mediación semiótica, cultura*, entre otros, elementos que son objeto de estudio en nuestro marco teórico.

Capítulo 2
Marco Teórico

2.1 Introducción

En este capítulo presentamos y desarrollamos las ideas teóricas que dan sustento a la investigación. En la primera sección abordamos la idea de cultura y su importancia en los proceso de aprendizaje. Nos parece importante profundizar, en la segunda parte, en el concepto de mediación semiótica desde la perspectiva de Vygotski y presentar su propuesta teórica acerca del desarrollo del pensamiento. La instrucción precede al desarrollo o, en otras palabras, el pensamiento se puede desarrollar, es una tesis revolucionaria en su estructura teórica y nos sirve como insumo en el tratamiento metodológico que abordamos en el siguiente capítulo.

De esta manera, con las ideas de cultura y mediación semiótica abonamos el camino para plantear, en la última sección, desde la postura de Radford (2006b, 2013a), la teoría cultural de la objetivación como una aproximación histórico-cultural. Presentamos, en la primera subsección los elementos iniciales y fundamentales de la teoría y luego, en la siguiente subsección, exponemos algunos elementos de orden filosófico fundamentalmente desde los trabajos de Hegel (1837/2001, 1817/2004) y Davydov (1981). En el desarrollo de esta teoría planteamos, en las siguientes subsecciones, la importancia del gesto como un medio semiótico de objetivación y los constructos de nodo semiótico y contracción semiótica, así como los elementos característicos del pensamiento algebraico y la generalización algebraica de patrones.

2.2 La idea de cultura en esta investigación y su importancia en los procesos de aprendizaje

La idea de cultura que en esta investigación queremos exponer viene de la perspectiva antropológica la cual establece que el sujeto que aprende es, también, un sujeto cultural, inmerso en una cultura de la cual hereda modos de actuar, de hablar y de razonar (Montagu, 1968). En tal sentido, el individuo parece no estar movido por un poder de auto determinación cuyos proyectos y significados emanan del individuo en cuestión, pues la cultura juega un papel importante en sus formas de pensar y de actuar.

Las aproximaciones socioculturales y antropológicas plantean un individuo contextual, cultural, concreto, cuya formulación de proyectos, modos de pensar y de actuar, y su producción de significados sólo tiene razón de ser dentro del espectro de posibilidades que la cultura pone a su disposición, a través de instituciones y sus inevitables redes de distribución de poder y saber. La producción de significados por parte de un sujeto dentro de una cultura en particular, encuentra asidero en la idea de *sujetos semióticos* en el sentido de Lamiell (2003, citado por Valsiner, 2012), quien con este constructo quiere enfatizar el hecho de que bajo todas las circunstancias de la vida, los seres humanos son constructores activos de significado.

El objetivo de una perspectiva antropológica de la educación es erradicar la separación entre la cognición y el contexto, en la investigación educativa. Como lo afirma Rosch (1975), es la cultura a través de la cual los seres humanos 'ven la naturaleza', o, interpretando a Hegel (1817/2004), cultura quiere decir poder mirar las cosas desde el punto de vista del otro, lo cual significa, entre otras cosas, reconocer un sistema de significados construido por los individuos y compartido, que permite la comunicación.

La influencia de la cultura en el comportamiento de los seres humanos es resaltada por Gillin (1948, citado por Miranda, 2009, p. 178). Según este autor: "si conocemos la cultura y sus implicaciones de un hombre o de un grupo de hombres, podemos predecir una cierta parte de su comportamiento en circunstancias dadas en el futuro y explicar la mayoría de sus acciones en el pasado". De acuerdo con Miranda (2009, p. 29):

> Si se concibe a los estudiantes como individuos pertenecientes a una cultura determinada, la importancia del conocimiento de ésta no sólo permite predecir el comportamiento de los estudiantes, sino que también posibilita comprender la manera en que los científicos profesionales interpretan los fenómenos ocurridos en su entorno natural.

Coincidimos con Miranda (2009), en tanto el entorno cultural de los estudiantes tiene una historia y es deseable conocer dicha historia, su andamiaje y su evolución para poder tomar decisiones lo más acertadas posibles en términos de sus trayectorias de aprendizaje, poder valorar sus dificultades y concebir estrategias pedagógicas y didácticas para familiarizarlos con los objetos culturales.

De acuerdo con White (1959, p. 235), toda cultura se distingue por eventos (e.g., actitudes humanas, una conversación) y cosas (objetos físicos) que suceden en un espacio y un tiempo específicos:
(1) dentro de organismos humanos, es decir, conceptos, creencias, emociones, actitudes;
(2) dentro de procesos de interacciones sociales entre seres humanos; y
(3) dentro de objetos materiales (hachas, fábricas, vías de tren, tazones de cerámica), que se encuentran fuera de los organismos humanos, pero dentro de patrones de interacción social [existentes] entre ellos. White identifica a la *simbolización* como la característica principal de la existencia temporal y espacial de las cosas y de los eventos. Todos los objetos materiales, los conceptos, las creencias, las emociones y las actitudes adquieren significado en el momento en que los seres humanos interactúan entre sí.

El mismo Vygotski pretende explicar el desarrollo cultural del comportamiento en términos de la sociabilidad humana. Según Vygotski (1989, p. 145):

> Todo lo cultural es social. La cultura es, justamente, el producto de la vida social y de la actividad social del hombre y por ello el planteo mismo del

problema del desarrollo cultural del comportamiento nos introduce directamente en el plano social del desarrollo.

Con este planteamiento, Vygotski pretende explicar el desarrollo cultural del comportamiento en términos de la sociabilidad humana. Por ejemplo, señala este autor, la génesis de los conceptos científicos en el niño ocurre, primero, en el plano social y, después, en el plano psicológico. Siguiendo a Miranda (2009), en forma metafórica, la adquisición del conocimiento científico en el niño puede ser considerada como un *segmento dirigido* que inicia en las personas que rodean al niño y termina en la mente de éste.

Coincidimos con Ratner (2000, p. 8) en señalar que los fenómenos culturales son hechos sociales que se crean de manera colectiva y compartida. De acuerdo con este autor, hay cinco clases principales de fenómenos culturales, a saber:

1. *Actividades culturales,* tales como producir comida, la crianza y la educación de los niños, suministrar cuidados médicos. Es a través de estas actividades que los seres humanos sobreviven y se desarrollan.
2. *Valores culturales, esquemas, significados, conceptos*, las personas colectivamente dotan las cosas con significado. La juventud, la tercera edad, hombre, mujer, la riqueza, la naturaleza y el tiempo significan cosas distintas en sociedades diferentes.
3. *Artefactos físicos*, tales como herramientas, juguetes, juegos, armas y tecnología los cuales son colectivamente construidos.
4. *Fenómenos psicológicos,* tales como las emociones, la percepción, motivación, el razonamiento lógico, la inteligencia, la memoria, la imaginación, el lenguaje y la personalidad son colectivamente construidos y distribuidos. Este fenómeno cultural sintoniza bien con una de las tesis de Vygotski según la cual los procesos psicológicos superiores tienen su origen en procesos sociales.
5. *Agencia*. Los seres humanos activamente construyen y reconstruyen fenómenos culturales. Esta agencia está dirigida a construir fenómenos culturales y es también influenciada por la existencia de actividades culturales, valores, artefactos y la psicología.

Ratner (2009) puntualiza que estos cinco fenómenos culturales, además de ser distintivos, son interdependientes y están entrelazados. Ninguno es reducible a los otros. Junto con esta configuración integrada de fenómenos culturales, según este autor, las actividades culturales son las más influyentes y ello encuentra explicación por el hecho de que este tipo de actividades se constituye en el medio a través del cual las personas sobreviven y se desarrollan.

La cultura, por lo tanto, podemos caracterizarla como el complejo que sirve para nombrar el cúmulo de conocimientos, conceptos, técnicas, actividades, creencias y valores, expresados en símbolos y prácticas, que caracterizan a cualquier grupo humano, y que suele transmitirse -aunque no mecánicamente- en el tiempo (de una generación a otra) y en el espacio (de un lugar a otro). Afirmación que encuentra sustento en Guillin (1948) para quien todas las culturas elaboran formas científicas que les permiten explicar su entorno cultural.

Por ejemplo, en particular, las formas de argumentación, de explicación, de los estudiantes son manifestaciones de una cultura cuyo método de entender el mundo se basa en la postulación de hipótesis y conclusiones. Por ejemplo, Maddock (1981) analiza finamente cómo a partir del lanzamiento del satélite ruso artificial Sputnik, en 1957, la educación de la ciencia y, en consecuencia, las formas científicas de argumentación fueron incluidas en el modelo educativo de América del Norte. Este es uno de los ejemplos por el cual puede afirmarse que las formas de argumentación de los estudiantes son culturales, es decir, la cultura permea una cierta realidad. Ramos (1936) lo plantea mejor: “Se desconoce la noción de que [la cultura] es una función del espíritu destinada a humanizar la realidad” (p. 18).

A manera de corolario, podríamos afirmar que la cultura es consustancial al conocimiento. Por ello, como plantea Radford (2004b), uno de sus papeles es sugerir a los sujetos formas de percibir la realidad y sus fenómenos, formas de apuntar o formas de intuición como lo diría Husserl (1931). Las formas de conocer y lo que conocemos hoy en día, señala este investigador, lleva consigo las trazas y los sedimentos de formas históricas y culturales; en otras palabras, en el mismo acto de conocimiento están operando, y no de manera accidental, Sistemas Semióticos de Significación Cultural, en este sentido tiene razón Vygotski (1989), en tanto se piensa con y a través de los signos.[15]

Cole (1999, citado por Kozulin, 2000) llegó a la conclusión de que las consecuencias cognitivas de la educación formal y del empleo de los instrumentos psicológicos asociados con ella no tienen un carácter absoluto, sino que dependen en gran medida de la estructura de las actividades predominantes en una cultura o una subcultura dada.

Según Kozulin (2000), en las teorías de Vygotski se considera que el agente (individuo que actúa con instrumentos culturales) se extiende más allá del individuo. Esta extensión se da de dos maneras principales: (a) el agente suele ser más una propiedad de las díadas y de otros grupos pequeños que de los individuos, y (b) los instrumentos culturales simbólicos que median en la acción humana están conectados intrínsecamente con los contextos históricos, culturales e institucionales, extendiendo el agente humano más allá de un individuo dado.

La argumentación desarrollada en esta sección hace necesario y pertinente plantear el tema de la mediación semiótica en el sentido de Vygotski, así como su vínculo con el desarrollo del pensamiento, dos aspectos importantes en esta investigación.

2.3 La mediación semiótica de Vygotski y su influencia teórica sobre el desarrollo del pensamiento

La idea de signo en los planteamientos de Vygotski es fundamental dentro de su teoría psicológica y, aún más, es necesario profundizar en ella si deseamos aproximarnos, en parte, al sentido del desarrollo de su obra. Un principio básico en sus ideas al respecto, sugiere que el signo mediatiza la relación del ser humano con otro y la relación del ser humano consigo mismo. Cárdenas (en prensa) plantea que desde la perspectiva de la comunicación, la mediación instaura las intenciones, puntos de vista, perspectivas,

[15] La idea teórica de Sistemas Semióticos de Significación Cultural será presentada en el apartado 2.4.1.

modalidades y estrategias con que nos comunicamos. Por ello la mediación lingüística es una condición sine qua non de la manera como el sujeto se sitúa en el mundo y se relaciona con los demás, a través de actos de conciencia, conocimiento, conducta y comunicación.

Podríamos afirmar que estos cuatro actos hacen emerger el concepto de interés, pues éste regula el entendimiento, modula la razón teórica y la razón práctica y configura el campo de la experiencia; de ahí sus vínculos estrechos con la mediación. Según Cárdenas (en prensa), la mediación, desde la conciencia, le da piso al sentido, marca la disposición del lenguaje hacia un cierto objeto desde un sujeto que hace y decide de manera deliberada y responsable. Por tanto, el signo cumple el papel de una operación significativa. Aún más, los signos *no se limitan únicamente a su función representativa*,[16] la elección de ellos no es neutra o independiente y dicha elección orienta el destino en el cual se expresa el pensamiento, el destino de la comunicación.

Dicha relación epistemológica es vista, entonces, de tal forma que el objeto de conocimiento es inseparable de la actividad de los individuos. Según Cole (1999), Marx sostenía que el objeto producido no es algo simplemente externo e indiferente a la naturaleza del productor: es su actividad en una forma cosificada o petrificada. El exterior, histórica y culturalmente constituido, es el que provee el material de base con el cual se van formando los individuos y los conocimientos que éstos forman a través de procesos sociales de interiorización. Esta idea de interiorización la entendemos en el sentido de Vygotski, como un proceso de formación de la mente a través de la interacción social, proceso en el cual se conserva el carácter social de las funciones externas al hacerse internas; de esta manera es posible aseverar que las funciones psicológicas superiores son internalizadas desde lo social.

Para comprender el significado de los signos, no los podemos reducir simplemente a lo que ellos representan. Debemos comprender el tipo de actividad que ellos permiten realizar. Éste sería un argumento que nos faculta a afirmar que los problemas de los estudiantes no están solamente en las estructuras semióticas complicadas que ellos deben manejar sino

[16] El énfasis es mío.

principalmente en el sistema de prácticas asociadas con estas representaciones semióticas. D´Amore (2001) señala que no basta construir un sistema de reglas para los signos y hacerlo explícito, posibilitando operar correctamente marcas en un papel, sino que se debe asignar sentido a la operatividad del signo.

De acuerdo con la perspectiva de Vygotski, los signos se interponen entre cualquier función natural psicológica del ser humano y su objeto de saber, *cambiando de raíz las propiedades de dicha función*. Según Vygotski (1931/2000, p. 123) “en la estructura superior el signo y el modo de su empleo es el determinante funcional o el foco de todo el proceso”. Lo mismo que la utilización de una u otra herramienta determina todo el mecanismo de la operación laboral, así también el carácter del signo utilizado constituye el factor fundamental del que depende la construcción de todo el proceso.

Pero por otro lado, Vygotski (1931/2000, p. 146) sostiene que: “el signo, al principio, es siempre un medio de relación social, un medio de influencia sobre los demás y tan sólo después se transforma en medio de influencia sobre sí mismo”. Vygotski quiere señalar que más allá de influenciar la conducta de los demás, el signo adquiere la peculiaridad de ser un instrumento que transforma al sujeto mismo. De aquí que podríamos hablar de la condición procesual del significado de un signo (Vygotski, 1987), en el sentido de que el significado no se descubre, sino que él mismo se materializa, gesta y transforma durante una situación comunicativa singular gracias al intercambio lingüístico establecido por los usuarios entre sí. En otras palabras, el término signo es utilizado por Vygotski con el sentido de poseedor de significado (Wertsch, 1985/1988, p. 34). De aquí que la base estructural de las formas culturales del comportamiento es la actividad mediadora (Vygotski, 2000), la utilización de signos externos como medio para el desarrollo ulterior de la conducta.

En esta misma dirección, Castorina & Carretero (2012, p. 30) al plantear el papel que juegan los signos en la cognición, señalan que “la incorporación de signos en el pensamiento transforma el grado de elaboración cognitiva”. En una discusión que intenta aclarar lo semiótico, Castorina & Carretero (2012) plantean que a pesar de sus divergencias respecto del papel que tienen los signos en el pensamiento, tanto Piaget con su función semiótica como Vygotski con su mediación semiótica incorporan una variedad de signos, sin distinguir sus particularidades ni su complejidad cognitiva.

Un aspecto importante que establecen estos dos autores es “el grado en que los signos están integrados en un sistema” (Castorina & Carretero, 2012, p. 30). Esto significa, indudablemente, una afectación en la cognición, pues los signos pertenecen a un sistema que tiene reglas y conlleva un sistema de significación. Más precisamente, Castorina & Carretero (2012) afirman que:

> La creación y utilización de un signo particular por parte de una persona, por importante que sea, no es comparable con el uso de signos que pertenecen a un sistema y cuyos significados están determinados por un conjunto de reglas. La complejidad de significados y el valor instrumental de unos y otros no es comparable. Los signos que forman parte de un sistema establecen un entramado semántico complejo y su uso repercute de forma profunda en la cognición. Además, si pensamos en las necesidades educativas, los sistemas de signos (como la escritura y la notación matemática) se han convertido en objetos de enseñanza. Su importancia cultural es innegable. (pp. 30-31)

Esta afectación en la cognición la interpretamos desde Vygotski (1929), pues para este autor toda la estructura de los procesos que despliega un sujeto estará determinada por el carácter de los medios (por ejemplo, signos, artefactos) que ha seleccionado para llevar a cabo dichos procesos. La afectación de la cognición humana tiene asidero en la idea de *plasticidad semiótica*[17] de la mente humana (D´Amore, Fandiño & Iori, 2013, p. 82) refiere a la “capacidad de ésta de ser modificada por el uso de los signos”. Sin embargo, esta complejidad cognitiva no obedece solamente a los sistemas de signos en sí mismos. Nos parece fundamental señalar que si bien el signo refleja, porque la representación es su característica, ella no es simple ni directa. La representación está preñada de prácticas sociales y acuerdos culturales.

[17] El énfasis es mío.

En la *concepción arquitectónica del signo*, Bajtín (1929/1992) afirma que éste adopta maneras de representar, adopta acentos típicos de la manera de participación social de los usuarios, para lo cual entra en el universo de lo axiológico, de la valoración, de lo ideológico. En este sentido, la conciencia sólo deviene conciencia al llenarse de un contenido ideológico, es decir, sígnico y, por ende, sólo en el proceso de interacción social (Bajtín, 1929/1992). El enunciado, afirma Bajtín, dice del sujeto; esta *"psicología del cuerpo social"* bajtiniana hace visible el horizonte social y cultural en donde vive.

En esta dirección se inscriben los orígenes sociales de los procesos psicológicos superiores que Vygotski matiza en términos del funcionamiento interpsicológico, tal y como se refleja en su formulación de la ley genética del desarrollo cultural:

> Cualquier función, presente en el desarrollo cultural del niño, aparece dos veces o en dos planos distintos. En primer lugar aparece en el plano social, para hacerlo, luego, en el plano psicológico. En principio, aparece entre las personas y como una categoría interpsicológica, para luego aparecer en el niño como una categoría intrapsicológica. Esto es igualmente cierto con respecto a la atención voluntaria, la memoria lógica, la formación de conceptos y el desarrollo de la volición. Podemos considerar esta argumentación como una ley en el sentido estricto del término, aunque debe decirse que la internalización transforma el proceso en sí mismo, cambiando su estructura y funciones. Las relaciones sociales o relaciones entre las personas subyacen genéticamente a todas las funciones superiores y a sus relaciones. (Wertsch, 1988, pp.77-78)

De esta formulación podemos destacar, al menos, dos aspectos. Por un lado, la idea de *internalización* insta a pensar que no es posible establecer la relación entre los dos planos en términos de reflejo, esto es, no parece colegirse un "modelo transferencial de internalización" (Wertsch, 1985/1988, p. 80). Muy al contrario, para Vygostki los procesos psicológicos superiores internalizados (pensamiento lógico, la deducción, la abstracción, la categorización, la generalización, entre otros) no son meras copias de procesos externos interpsicológicos, pues como bien lo anota el mismo autor, la internalización transforma el proceso en sí cambiando su estructura y funciones. Los instrumentos con que mediatizamos la actividad humana, aparte de cumplir su función pragmática de permitirnos llevar a cabo la actividad misma, son fundamentalmente importantes en tanto que afectan y alteran nuestras funciones psíquicas superiores.

Según Kozulin (2000), Vygotski trazó una primera distinción entre los procesos mentales naturales "inferiores" de la percepción, la atención, la memoria y la voluntad, y las funciones psicológicas culturales "superiores" que aparecen bajo la influencia de los instrumentos simbólicos. Las funciones inferiores no desaparecen, sino que son sustituidas e incorporadas a las culturales. De ahí la importancia de los problemas que proponemos a los estudiantes, por cuanto como afirma Vygotski (1929), si la tarea o el problema no están por encima de las capacidades naturales del niño, él puede dominarlos por el método natural o primitivo.

Por otro lado, la idea de *desarrollo,* lejos de ser ingenua en los planteamientos de Vygotski, cobra especial relevancia en su teoría del desarrollo genético. De acuerdo con Wertsch (1985/1988), Vygotski define el desarrollo en términos de aparición y transformación de las diversas *formas de mediación*. Esta noción de desarrollo y su relación con los procesos psicológicos superiores implican necesariamente *mecanismos semióticos*. Es claro que para Vygotski el desarrollo es considerado en términos de *saltos revolucionarios* fundamentales más que en términos de incrementos cuantitativos constantes.

Es más, él defendió los puntos principales del desarrollo en términos de los cambios experimentados en la forma de mediación utilizada, esto es, en las acciones del sujeto a través del uso de instrumentos de mediación semiótica. Afirma Noel (1995, p. 81):

> […] la mediación en general toma un nuevo significado. La esencia deja de confundirse con el movimiento mismo de la reflexión; es, de cierta manera, el elemento donde se produce el movimiento y lo hace posible. Las determinaciones de la reflexión dejan de flotar, por así decirlo, en el vacío y encuentra un soporte en la esencia.

La idea de desarrollo para Vygotski tiene sus vínculos estrechos con su idea de signo. Coincidimos con Wertsch (1985/1988) en señalar que los tres temas que constituyen el núcleo de la estructura teórica de Vygotski son:

1) *la creencia en el método genético o evolutivo*
2) *los procesos psicológicos superiores tienen su origen en procesos sociales,* y
3) *los procesos mentales o cognitivos pueden entenderse solamente mediante la comprensión de los instrumentos y signos que actúan como mediadores*.

La creencia en el método genético, de acuerdo con Vygotski, significa que el pensamiento se puede desarrollar. Vygotski se centró en estudiar cómo el funcionamiento interpsicológico podía ser estructurado de tal manera que maximice el crecimiento del funcionamiento intrapsicológico (Wertsch, 1985/1988). "La instrucción solamente es positiva cuando va más allá del desarrollo. Entonces despierta y pone en funcionamiento toda una serie de funciones que, situadas en la zona de desarrollo próximo, se encuentran en proceso de maduración" (Wertsch, 1985/1988, p. 87).

En su trabajo sobre *"El problema del desarrollo cultural del niño*", Vygotski (1929) deja entrever que cuando deliberadamente interferimos en el curso de los procesos de comportamiento, podemos hacerlo sólo de conformidad con las mismas leyes que rigen estos procesos en su curso natural. La inclusión en cualquier proceso de un signo, plantea Vygotski (1929), remodela toda la estructura de las operaciones psicológicas, así como la inclusión de una herramienta remodela toda la estructura de una operación de trabajo.

Las fronteras entre el funcionamiento social y el individual son bastante permeables en su descripción y su énfasis está puesto en las transformaciones entre los procesos intermentales (interpsicológicos) e intramentales (psicológicos) más que en la brecha que los separa. La composición de las funciones psíquicas superiores (Wertsch, 1998), su estructura genética y sus medios de acción, esto es, sus formas de mediación, en una palabra, toda su naturaleza, es *social*. Aun cuando nos afinquemos en los procesos psíquicos (internos), debemos reconocer que su naturaleza permanece cuasi-social. En su propia esfera privada, los seres humanos retienen las funciones de la interacción social.

Desde la perspectiva de Vygotski, el funcionamiento intramental es social no sólo por estar situado socioculturalmente, sino también porque como bien lo señala Wertsch (1998), retiene las funciones de la interacción social. Por ejemplo, muchas formas de resolución de problemas en el nivel individual son consideradas inherentemente dialógicas debido al hecho de que derivan de la participación en encuentros dialógicos en el plano intermental (Wertsch, 1985/1988). Esta declaración se entiende siempre y cuando se acepte que para Vygotski las formas de discurso dialógico que median en los procesos intermentales son usadas para conformar el plano intramental.

En esta dirección, la *intersubjetividad* se relaciona con la medida en que los interlocutores de una situación comunicativa comparten una perspectiva. Desde un punto de vista fenomenológico, Bajtín (1929/1992) examina esta idea desde la concreta relación *yo-otro*. De entrada, el énfasis en el sujeto como un ente social pone en cuestión el concepto mismo de identidad, al introducir la categoría de la alteridad como parte constituyente del yo, como su antecedente obligado y referente necesario. Al sujeto se le concibe más allá del eje egocéntrico, para ubicarlo en la red de relaciones dialógicas que establece consigo mismo y con la alteridad (en realidad, con una multiplicidad de otros).

El yo no puede comprenderse íntegramente sin la presencia del otro, sin la actuación del otro, sin el discurso del otro. La identidad pierde así su eje egocéntrico y monológico; se vuelve heteroglósica, se constituye a partir de distintas voces. Identidad y alteridad se entienden entonces como conceptos interdependientes, complementarios, de una naturaleza relacional y relativa.

Wertsch (1998), inspirado en el trabajo de Ragnar Rommetveit, al referirse a la categoría de intersubjetividad, plantea:

> El problema básico de la intersubjetividad humana se vuelve […] una cuestión que tiene que ver con qué sentido y bajo qué condiciones dos personas que se involucran en un diálogo pueden trascender sus mundos privados diferentes. Y la base lingüística para esta empresa no es, según sostengo, un repertorio fijo de significados "literales" compartidos, sino bosquejos muy generales y parcialmente negociados de contratos concernientes a la clasificación y atribución inherente al lenguaje ordinario. (Rommetveit, 1979, citado por Wertsch, 1998, p. 177)

La idea de intersubjetividad, a nuestro juicio, se encuentra íntimamente relacionada con la idea bajtiniana de *dialogía* (Bajtín, 1929/1992), según la cual el acto discursivo obedece a un carácter responsivo y no sólo significativo. Las ideas de Bajtín sugieren que el enunciado encarna otros enunciadores. He ahí el vínculo con la historicidad propuesta por Vygotski en las prácticas sociales y en el lenguaje. Por lo que para Bajtín, la relación entre sujetos tiene como marco global al *dialogismo,* que de paso sea dicho, se constituye en el principio filosófico central de su concepción del lenguaje y de la vida social en su conjunto.

En la obra del filósofo, los significados del dialogismo son diversos, pero un punto de partida para su comprensión es su etimología, que refiere a la interacción de dos o más *logos,* cada uno con sus propios marcos axiológicos, voliciones y posicionamientos. El enunciado, el discurso, y en general su concepción global de la comunicación humana, derivan todos del principio dialógico, de la fundante relación yo-otro. Al respecto García (2006, p. 50) afirma que:

> [...] recordemos que una teoría bajtiniana del discurso afirma que no sólo se trata de lo que acontece "al interior" de nuestra propia conciencia, sino en la frontera de la conciencia de otro sujeto cabal, completo, precisamente en el umbral. Para Bajtín, el más alto grado de socialidad estriba en el hecho de que cada experiencia interna, cada sujeto, termina por toparse con otro. Toda la "ontología del yo" en el sentido bajtiniano se dialogiza, en primera instancia, en

esta frontera, y no puede realizarse más que en este lugar de encuentro lleno de tensiones. El sujeto siempre es el producto de su interacción con otros sujetos.

En esta perspectiva, la comunicación humana como acontece en la vida real no es un mero intercambio de mensajes basado en un código compartido y en un consenso de sentido, sino que, por el contrario, se trata siempre de una *tensión vital entre logos* fundamentalmente distintos, cada uno con su propia posición axiológica respecto al mensaje, a su objeto, al código, al emisor, así como a los contextos de interacción.

El sentido de un enunciado, nos enseña Bajtín, incluye la respuesta del receptor y no se realiza tomando las palabras mecánicamente, como si fuesen entradas de diccionario, colocadas una tras otra de acuerdo con reglas sintácticas, sino como elementos cargados de valoraciones sociales, puestas en juego en el proceso de la comunicación interdiscursiva.

Bajtín (1929/1992) señala cómo desde la temprana adquisición del lenguaje y a lo largo de la vida, el hombre se inicia como un ser social y se desarrolla como tal construyendo su individualidad a partir del otro, de las acciones y del discurso del otro, para continuar con éste una íntima y compleja relación. El sujeto social se forma discursivamente, en el proceso comunicativo de yo con el otro, es decir que el discurso propio se construye en relación con el discurso ajeno, en el proceso de una íntima y constante interacción. Las respectivas identidades se construyen en el proceso de la comunicación interdiscursiva. Así pues, en Bajtín el ser presenta un carácter intrínsecamente dialógico, *"ser es ser para otro y a través del otro para mí"*.

Por supuesto, el lenguaje pasa a ser entendido, entonces, como un aspecto nuclear de la constitución subjetiva de la persona, en la medida que establece un nudo entre el orden de lo psicológico y el orden de la cultura, a través de los significados. El lenguaje no es ni un mero "compañero" de las acciones, tampoco un simple medio de expresión de ideas, es un instrumento para transformar la realidad (Kozulin, 2000) y hacer que, a cuentas de ser algo dado, sea algo que se está desarrollando. Estos elementos claramente desvirtúan la idea representacionista que tal vez algunos autores le han querido conferir solamente al lenguaje.

El papel del lenguaje nos parece fundamental, lejos de esa idea representacionista. Más aún, para la comprensión del papel de la educación en el desarrollo del sujeto social, considerar el lenguaje es clave, dada la estrecha relación que éste tiene con el desarrollo del pensamiento y del conocimiento (Vygotski, 1934/2007). En esta perspectiva, tomando el lenguaje como potencial semiótico y noético (Duval, 1995/1999), es posible reconocer, en él, tres dimensiones (Calderón, 2005):

- La *ética*, que vincula sujeto discursivo y aspectos de tipo normativo, axiológico y actitudinal de la comunicación y de la significación compartidas socialmente.
- La *psicológica*, considerando el lenguaje como acción humana, que pone en juego aspectos de tipo cognitivo y de tipo semiótico e informativo; es decir, el desarrollo de procesos de significación que exigen el permanente proceso de semiotización.
- La *social*, que destaca las funciones comunicativa e interactiva del lenguaje.

Estas tres dimensiones, que sólo separamos para propósitos analíticos, están presentes en toda producción y desarrollo discursivo; de ahí la importancia de considerarlas en aras de la comprensión de los distintos aspectos manifiestos en la discursividad de los hablantes. Discursividad que por supuesto no está ajena de los instrumentos de mediación semiótica que el sujeto pone en acción. De esto advierte Wertsch (1991, p. 46):

> Contrastando con muchos análisis contemporáneos del lenguaje, con su acento puesto en la estructura de los sistemas de signos, con independencia de cualquier función mediadora que puedan cumplir, Vygotski encaró al lenguaje y otros sistemas de signos como parte y como mediadores de la acción humana.

Podemos inferir que la principal característica distintiva del aprendizaje y el desarrollo psicológico del ser humano, según Vygotski, reside en la intervención de instrumentos psicológicos simbólicos en este proceso. Los signos, los textos escritos, los sistemas numéricos, las fórmulas, los gráficos y otros recursos simbólicos, modifican radicalmente el proceso de aprendizaje, permitiendo a los estudiantes organizar y regular sus propios procesos cognitivos con la ayuda de estos *instrumentos culturales*.

En este sentido, los canales por donde transita la interacción entre individuos, ya se encuentran moldeados por formas culturales de discurso que son a la vez productoras y reguladoras del saber, en otras palabras, las maneras de conocer y lo que conocemos hoy en día lleva consigo las trazas y los sedimentos de formas históricas y culturales, formas que "contaminan" los procesos psicológicos. Pero, *¿cuál es el origen de estos procesos psicológicos?, ¿desde dónde fundamenta Vygotski esta idea?*

Nos parece importante subrayar que Vygotski asume una perspectiva marxista en la elaboración de su idea de procesos psicológicos. Sostiene, de acuerdo con Marx, que "los cambios históricos que se producen en la sociedad y en la vida material conllevan, al mismo tiempo, otros cambios en la "naturaleza humana" (en la conciencia y conducta). Vygotski fue el primero en relacionar estas ideas con las cuestiones psicológicas específicas (Wertsch, 1991). De Engels, por ejemplo, basado en el concepto de trabajo humano y uso de herramientas, elaboró la idea de que a través de éstos el hombre cambia la naturaleza y, simultáneamente se transforma a sí mismo.

Vygotski explota de esta manera el concepto de herramienta de un modo particular basado en las ideas de Engels: la especialización de la mano significa la herramienta y ésta presupone la actividad específicamente humana, la reacción transformadora del hombre sobre la naturaleza. El animal utiliza la naturaleza exterior e introduce cambios en ella pura y simplemente con su presencia, mientras que el hombre, mediante sus cambios, la hace servir a sus fines, la domina. A juicio de Vygotski (1929), podemos transformar la naturaleza hacia el exterior y ponerla al servicio de nuestros fines únicamente de conformidad con las leyes mismas de la naturaleza.

Podemos, entonces, llegar a pensar que Vygotski concibió los procesos psicológicos superiores como una aplicación psicológicamente importante del materialismo histórico y dialéctico.[18] Un eje central de este método consistía en que todos los fenómenos debían ser estudiados como procesos en constante movimiento y cambio. Vygotski destacó que los procesos psicológicos superiores surgen de la actividad humana mediada por instrumentos psicológicos de carácter semiótico. Por lo tanto, el *desarrollo cognitivo parece depender del dominio progresivo de unos sistemas de mediación simbólica cada vez más complejos*.[19]

Vygotski (1931/2000, p. 34) sugiere que:

> la cultura origina formas especiales de conducta, modifica la actividad de las funciones psíquicas, edifica nuevos niveles en el sistema de comportamiento humano del desarrollo. En el proceso de desarrollo histórico, el hombre social modifica los modos y procedimientos de su conducta, transforma sus inclinaciones naturales y funciones, elabora y crea nuevas formas de comportamiento específicamente culturales.

El lenguaje, la escritura y las distintas formas literarias son los instrumentos culturales-psicológicos que proporcionan el mecanismo formal para el dominio de los procesos psicológicos.

Wertsch (1985/1988) plantea que para Vygotski un primer criterio que caracteriza las funciones psicológicas superiores (pero no las elementales) es su *origen y naturaleza social*. De esta forma, sugería Vygotski, no es la naturaleza, sino la sociedad la que, por encima de todo, debe ser considerada como el factor determinante del comportamiento humano. Vygotski (1931/2000, p. 151) plantea que:

[18] En Hegel (1817/2004), el término dialéctica tiene una larga historia. De él se destacan cuatro acepciones fundamentales: (1) la dialéctica como método de la división lógica, conforme a la cual se clasifica un concepto genérico en sus especies; (2) la dialéctica como lógica de lo probable; (3) la dialéctica como término para designar a la lógica entera y (4) la dialéctica como método encaminado a superar las oposiciones de dos términos (tesis-antítesis) en uno nuevo: la síntesis (p. xxxix). Hegel asimila esta última acepción, prosiguiendo y desenvolviendo ideas al respecto de Kant y Fichte.
[19] El énfasis es mío.

> Todas las funciones psíquicas superiores son relaciones interiorizadas de orden social, son el fundamento de la estructura social de la personalidad. Su composición, estructura genética y modo de acción, en una palabra, toda su naturaleza es social; incluso al convertirse en procesos psíquicos sigue siendo cuasi-social. El hombre, incluso a solas consigo mismo, conserva funciones de comunicación.

Un segundo criterio para diferenciar las funciones psicológicas superiores de las elementales es el de la *mediación*. En este sentido, sostiene Wertsch (1985/1988), la concepción vygotskiana del control voluntario, la realización consciente y la naturaleza social de los procesos psicológicos superiores presuponen la existencia de herramientas psicológicas o signos, que pueden ser utilizados para controlar la actividad propia y la de los demás. Los signos o herramientas psicológicas como medios semióticos también encuentran sostén desde una concepción antropológica aplicada al proceso educativo. Estamos de acuerdo con Herrero (1992) en señalar que es imposible concebir al ser humano fuera de las relaciones que le ponen en contacto con el otro.

La noción de mediación es analíticamente importante. De acuerdo con Vygotski, la presencia de estímulos creados, junto con estímulos dados es la característica diferencial de la psicología humana. Como lo señalan Cole & Wertsch (1996), los instrumentos o herramientas psicológicas recrean y reorganizan la estructura del comportamiento humano. Un corolario de esta argumentación podríamos enunciarlo de la siguiente manera: *los instrumentos o recursos con los cuales se realiza la actividad matemática condicionan las formas como los estudiantes se apropian, construyen o re-significan dicha actividad y desde luego las maneras de pensar*.

La idea de *conciencia* no está al margen de esta discusión, la verdad nunca ha estado al margen. Muy al contrario, esta noción es teorizada en relación con la idea de actividad. El desarrollo de la conciencia de un niño (Leontiev, 1983, citado en Kozulin, 2000, p. 40) "se produce como resultado del desarrollo del sistema de operaciones psicológicas que, a su vez, está determinado por las relaciones genuinas entre el niño y la realidad". Al respecto, Kozulin (2000, p. 79) destaca este tipo de relaciones y la considera íntimamente ligada a la noción de trabajo:

> Hegel vincula la aparición de la conciencia y la autoconciencia del ser humano con el proceso de actividad mediada que es el trabajo. La noción filosófica de *mediación* ya sugiere toda una gama de posibles agentes mediadores. En primer lugar, el trabajo presupone unos instrumentos materiales interpuestos entre el individuo y el objeto natural. Aunque estos instrumentos están dirigidos a objetos naturales, también tienen una influencia recíproca en el individuo, modificando así su tipo de actividad y de cognición. En segundo lugar, como el trabajo siempre es un trabajo para alguien más, las características sociales y psicológicas de esa otra persona también entran en la ecuación. Por último, puesto que el trabajo es imposible sin representaciones simbólicas, estos símbolos y sus medios de transmisión pasan a ser dos agentes mediadores más.

Para Kozulin, la conciencia del sujeto está estrechamente vinculada con la interacción, no sólo con el objeto natural sino también con el otro. Esta relación compleja que construye la individualidad del sujeto a partir del otro, como en una relación de alteridad bajtiniana, influye de manera esencial en el desarrollo de la conciencia; al decir Bajtín (1979/2009, p. 360), "la conciencia del hombre despierta envuelta en la conciencia ajena", lo cual sugiere que la conciencia adquiere su identidad dentro de la práctica social reflexiva. Según Radford (2013, p. 27):

> La conciencia individual es una forma específicamente humana de reflexión subjetiva sobre la realidad concreta en el curso de la cual tomamos sensibilidad de las formas culturales que nos permite considerar, reflexionar, comprender, disentir, objetar y sentir acerca de otros, de nosotros mismos y de nuestro mundo.

El llamado que hacen Kozulin y Radford en el sentido de buscar los orígenes de la actividad consciente en lo externo, en el otro, en lo social, ha sido discutido también por Luria, tal y como lo reporta Wertsch (1998, p. 26):

> Para explicar las formas altamente complejas de la conciencia hay que ir más allá del organismo humano. No hay que buscar los orígenes de la actividad consciente y la conducta "categórica" en las depresiones del cerebro humano o en las profundidades del espíritu, sino en las condiciones externas de vida. Por sobre todo, esto significa que hay que buscar esos orígenes en los procesos externos de la vida social, en las formas sociales e históricas de la existencia humana.

En particular, la mediación del lenguaje, además de su importancia en el contacto social, consideramos que aporta al desarrollo cognitivo varias formas de ser: libertad operacional, independencia del contexto, complejidad de la acción (planeación), autorreflexividad (conciencia del lenguaje, conducta mediata) y control de la conducta (no a los impulsos). Anota Cárdenas (en prensa) que desde esta perspectiva, para Vygotski "[…] la característica básica de la conducta humana en general es que las personas influyen en sus relaciones con el entorno, y a través de dicho entorno modifican su conducta, sometiéndola a su control".

Podemos afirmar, entonces, que en términos educativos el desarrollo cultural es un proceso artificial. Como bien lo anota Vygotski (1987, p.187):

> "La educación es el *desarrollo artificial* del niño; [la educación] es el dominio ingenioso de los procesos naturales del desarrollo y no sólo influye sobre unos u otros procesos del desarrollo, sino que reestructura, de la manera más esencial, todas las funciones de la conducta".

Esta *línea cultural de desarrollo* vygotskiana requiere de un complejo y relativamente largo proceso de apropiación cultural. Proceso que estaría orientado a propiciar grados crecientes de dominio *autónomo* (consciente y voluntario) y *descontextualizado* de los instrumentos de mediación semiótica, lo cual posibilitaría en nuestros estudiantes, por ejemplo, formas de conceptualización cada vez más elaboradas o sofisticadas.

En términos de Wertsch (1985/1988), Vygotski concibió un principio de desarrollo que llamó *Principio de descontextualización de los instrumentos de mediación*, según el cual "el significado de los signos se vuelve cada vez menos dependiente del contexto espacio-temporal en el que son utilizados" (pp. 49-50). De esta forma podemos explicar, señala Wertsch (1985/1988, p. 50), cómo "las formas de calcular observadas en los hombres primitivos eran altamente dependientes del contexto", en otras palabras, el cálculo dependía de la percepción de objetos y entornos concretos.

Esta relación, anota Wertsch (1985/1988), no anticipa la capacidad de hacer distinciones más precisas entre cantidades, sino que las distinciones se basan en juicios sobre objetos concretos, perceptivamente presentes (objetos del contexto específico donde son utilizados los signos).

El principio de descontextualización de Vygotski opera, en este caso en particular, cuando, según Wertsch (1985/1988, p. 50):

> En el cálculo, la descontextualización se halla ligada a la aparición de un sistema numérico en el que una cantidad puede ser representada independientemente de cualquier contexto perceptivo. De hecho, la cantidad puede llegar a convertirse en un objeto abstracto en sí mismo, en lugar de un significado ligado a un determinado conjunto de objetos.

Tanto el enfoque teórico propuesto por Vygotski coma la teorización que hace sobre la mediación semiótica, son retomados por Radford cuando plantea su perspectiva teórica de la objetivación. En la siguiente sección presentamos los constructos teóricos de esta perspectiva, los cuales fungen como herramientas analíticas para explicar y comprender las actuaciones matemáticas de los estudiantes en esta investigación.

2.4 La teoría de la objetivación como una aproximación histórico-cultural

La teoría de la objetivación propuesta por Radford nace como una aproximación semiótica-cultural. En sus inicios se interesaba fundamentalmente por el papel de los signos en una cultura, su funcionamiento en términos del pensamiento, más que el estudio de los signos en sí mismos, tal y como interesa a la escuela italiana (véase, por ejemplo, Arzarello, 2006), que se encuentra interesada en la evolución de los signos. En este sentido es importante para esta escuela estudiar el signo que produce el alumno y en ese proceso cómo llega hasta el signo matemático (estándar), pasando por el signo que esta escuela llama pivote como aquél que se encuentra a mitad de camino entre el signo del alumno y el signo matemático.

El problema que preocupaba a la teoría de la objetivación en sus inicios era un problema de tipo epistemológico, en tanto centraba su atención en la relación del sujeto con el saber, por lo que el aprendizaje se planteaba como un problema de toma de conciencia.

Diagrama 1. Ubicación de la Teoría cultural de la objetivación en las perspectivas socioculturales

Dentro de las aproximaciones socioculturales de la educación matemática reconocemos el posicionamiento importante que ha venido logrando la perspectiva histórico-cultural desarrollada por Vygotski. Podríamos afirmar que en los trabajos más recientes (ver, por ejemplo, Radford, 2013a), la teoría de la objetivación se enmarca en esta perspectiva histórico-cultural. No obstante, nos parece necesario y pertinente presentar brevemente algunos aspectos de la génesis de la teoría de la objetivación, pues consideramos que aún cobran vigencia y, luego, continuar con sus desarrollos más actuales. En estos desarrollos se aprecia explícitamente un giro importante hacia las ideas de Hegel. Aquí, por su parte, el problema de la conciencia aparece taxativamente como un problema mediatizado por la actividad o la praxis social. No consideramos la conciencia como entidad metafísica. Estamos hablando de conciencia desde un punto de vista dialéctico-materialista, esto es, como un caso particular de la experiencia social.

2.4.1 Breve presentación de los inicios de la teoría de la objetivación. En tanto aproximación semiótica-cultural, interesa, pues, fundamentalmente el papel que desempeñan el organismo (lo corpóreo), el discurso y los signos cuando los alumnos refieren a objetos matemáticos. Sugiere abordar el problema de la cognición humana desde un punto de vista antropológico. Desde el punto de vista de D´Amore (2006, p. 178), "la línea de investigación antropológica parece fundamental en la comprensión del pensamiento matemático. Dicha línea de investigación debe atacar ciertos problemas, entre ellos el del uso de signos y artefactos en la cultura".

La teoría de la objetivación parte de un reposicionamiento del individuo visto como un sujeto que vive, piensa y actúa en el marco de su cultura y de la premisa que la base de la cognición se encuentra en la praxis social, entendida esta praxis no como una práctica contemplativa, sino como una actividad humana sensitiva y concreta (Radford, 2010a).

En esta aproximación asumimos dos principios fundamentales: *(1) los signos nos permiten reflexionar sobre el mundo y (2) el mundo es reflejado y refractado en los signos y en la forma en que éstos son usados*.[20] Estos dos principios se hacen operativos en tanto debemos

[20] El énfasis es mío.

reconocer, por ejemplo en el trabajo de aula de matemáticas, que los signos son portadores de convenciones y formas culturales de significación, es decir, tienen una historia y necesariamente influyen en nuestras estructuras psicológicas. Como bien lo señala D´Amore (2006), el empleo que hacemos de las diversas clases de signos y artefactos cuando intentamos llegar a conocer algo está subsumido en prototipos culturales de uso de signos y artefactos. Estos principios nos llevan a considerar la semiótica no sólo en su papel de representación de los objetos matemáticos, pues la actividad matemática está anclada en los complejos simbólicos de la cultura en que se desarrolla.[21]

La manera como se configura el conocimiento matemático está íntimamente definido por la cultura en la cual éste se desarrolla (Radford, 1997, p. 32). Coincidimos con Wertsch (1991, p. 35) cuando señala que "una aproximación sociocultural a la mente comienza con el supuesto de que la acción está mediada, y que no puede ser separada del medio en el que se lleva a cabo". Por lo tanto, la acción típicamente humana emplea instrumentos mediadores, tales como las herramientas o el lenguaje, y estos instrumentos mediadores dan forma a la acción de manera esencial.

Esta idea de acción humana encuentra, pues, su íntima relación con la cultura y el significado dentro de la cultura. En esta dirección, Bruner (2006, p. 20) sugiere que:

> En lugar de considerar la cultura como algún tipo de capa sobre la naturaleza humana determinada biológicamente, donde se presupone que las causas de la conducta humana residen en este sustrato biológico, deberíamos adoptar la perspectiva de que la cultura y la búsqueda de significado dentro de la cultura son las causas propias de la acción humana.

[21] El doctor Bruno D´Amore afirma que "si bien la semiótica nace desde un punto de vista realista, pues se piensa que los objetos ya existen, su importancia reside en la necesidad de diferenciar entre los objetos matemáticos y sus representaciones" (Declaración en el Seminario doctoral "Conceptos, objetos matemáticos y semiótica", ofrecido en el primer semestre de 2011 en el Doctorado Interinstitucional en Educación, énfasis en educación matemática, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá-Colombia).

El conocimiento (ver, por ejemplo, Radford, 2004, 2006a, 2006b), entonces, es un producto de un tipo específico de actividad humana, precisamente, de una actividad humana muy específica: el *pensamiento*. Dentro de esta perspectiva semiótica-cultural, el pensamiento es una actividad reflexiva y sensible mediada por signos, materializada en la corporeidad de las acciones, gestos y artefactos. Según Radford (2006b, p. 108), “El pensamiento es una reflexión, es decir, un movimiento dialéctico entre una realidad constituida histórica y culturalmente y un individuo que la refracta (y la modifica) según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios”.

Los fundamentos de la teoría de la objetivación desarrollada por Radford son dos: uno de naturaleza ontológica y otro de naturaleza epistemológica (Miranda, Radford & Guzmán, 2007). En relación con el fundamento ontológico, la teoría señala que los objetos matemáticos no son independientes de la actividad realizada por los seres humanos; ni son el resultado del descubrimiento llevado a cabo por científicos interesados en conocer una realidad externa a ellos (Miranda, Radford & Guzmán, 2007). Por el contrario, en la teoría de la objetivación, los objetos matemáticos son generados por los individuos en el transcurso de su desarrollo histórico-cultural; en específico, estos objetos “*son patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos*” (Radford, 2006b, p. 111).

En el fundamento epistemológico de la teoría de la objetivación se caracteriza la manera en que los estudiantes conocen los objetos matemáticos (Radford, 2006b). Este conocimiento no es la consecuencia de las acciones adaptativas de un estudiante en el momento de resolver un problema pues éstas son situadas dentro de las condiciones particulares de cada cultura y de cada forma de comprender el mundo (Miranda, Radford & Guzmán, 2007).

Las características de los fundamentos ontológico y epistemológico de la teoría de la objetivación sirven como base para concebir el aprendizaje de los objetos matemáticos como la “adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por modos epistémico-culturales históricamente formados” (Radford, 2006b, p. 105). Este aprendizaje no es una mera imposición o transmisión de contenidos conceptuales, sino un esfuerzo por "*dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura*" (Radford, 2006b, p. 113).

Es decir, los procesos de objetivación (Radford, 2009) los interpretamos como aquellos procesos sociales a través de los cuales los estudiantes capturan la lógica cultural con que los objetos de saber han sido dados y se familiarizan con las formas de acción y pensamiento históricamente constituidas. En otras palabras, la objetivación indica un proceso que tiene como objetivo mostrar alguna cosa (un objeto) a alguien. Pero, ¿cuáles son los medios para mostrar el objeto? Radford (2003, 2005b) los llama *medios semióticos de objetivación*, esto es, objetos, artefactos, términos lingüísticos y en general signos que se utilizan para comunicar o hacer visible una intención y para llevar a cabo una acción.
Al decir de Radford (2003, p. 41), los medios semióticos de objetivación son:

> Todos los medios utilizados por los individuos que se encuentran en un proceso de producción de significados, para lograr una forma estable de conciencia, para hacer presente sus intenciones y organizar sus acciones y así adquirir las metas de sus acciones.

Este constructo teórico nos parece fundamental dentro de la propuesta teórica formulada y desarrollada por Radford. Los medios semióticos de objetivación (Radford, 2003, 2005b, 2008a) no son únicamente herramientas por medio de las cuales manipulamos el mundo. Son también mediadores de nuestros actos intencionales, portadores de una conciencia histórica construida a partir de la actividad cognitiva de las generaciones precedentes.

Desde los puntos de vista de Radford (2008a, 2010a, 2010b) y Santi (2010), los recursos semióticos estratifican el objeto de saber (matemático) en niveles de generalidad de acuerdo con la actividad reflexiva que ellos median. Aceptamos, por supuesto, los medios semióticos de objetivación como elementos constitutivos de la forma de pensar. Estos medios semióticos pertenecen a una diversidad de sistemas simbólicos culturales que van más allá del individuo. Por ejemplo, las formas de resolver cierta clase de problemas, las formas de argumentar, de validar, de demostrar, las maneras de decidir si una hipótesis puede servir de evidencia a un enunciado, todas ellas tienen una historia, constituyen prácticas culturales. Por lo tanto, siguiendo a Radford (2008a), afirmamos que el signo y la forma en que éste es usado (esto es, su sintaxis y su pragmática) —forma necesariamente cultural en tanto que inmersa en *Sistemas Semióticos de Significación Cultural*— son considerados como constitutivos del objeto conceptual: *éstos objetivan al objeto*.

Por lo tanto, los Sistemas Semióticos de Significación Cultural los entendemos como superestructuras simbólicas de significados, construidos por los propios individuos. En esta superestructura simbólica son consideradas las opiniones y las creencias de una cultura, así como las formas de generación de significados. Es en esta superestructura semiótica en la cual se afinca la imaginación intelectual (Radford, 2008a). Por ello cada sujeto es hijo de su época, de su contexto cultural, y no siempre logra romper todos los lazos que lo vinculan con el modo de pensar de su tiempo. Sin embargo, si logra romper estos lazos (avanzando en la generación de nuevo conocimiento) debemos reconocer que necesariamente paga tributo a las formas anteriores de pensar. Esta dimensión semiótica nos antecede y afecta nuestras estructuras psíquicas como, por ejemplo, la percepción y la simbolización, y, en consecuencia, las teorizaciones que hacemos acerca del mundo. Los significados que circulan en el aula no pueden ser confinados a la dimensión interactiva que ocurre en el aula misma (Radford, 2006b). Por lo que, al decir de Radford (2008a), la objetivación del saber, en tanto que reflexión del mundo, es un punto de encuentro entre la experiencia personal y el saber cultural.

2.4.2. Algunas consideraciones filosóficas en la teoría de la objetivación. Desde un punto de vista hegeliano -teoría del materialismo dialéctico- la idea de *pensamiento* se considera como un proceso de actividad humana. Incluso, todos los fenómenos, desde el método del materialismo dialéctico, debían ser estudiados como procesos en constante movimiento y cambio, de donde se desprende que el movimiento es una categoría ontológica fundamental en la epistemología hegeliana.

Afirma Davydov (1981, p. 279): “El pensamiento de un hombre es el movimiento de formas de actividad de la sociedad históricamente constituidas y apropiadas por aquél”. En estos términos, el pensamiento se considera un proceso objetivo de la actividad humana, un movimiento de la civilización humana y de la sociedad. Inspirado en Engels, Davydov (1981, p. 283) sugiere que:

> "la actividad laboral, experimental por su esencia, les permite a los hombres revelar las conexiones indispensables y universales de los objetos. […]La forma de universalidad –dice Engels- es la forma de perfección interna. La forma de universalidad en la naturaleza es una ley […]".

Afirma Davydov (1981) que, por ejemplo, cuando el hombre sabe que el cloro y el hidrógeno bajo la acción de la luz y a determinada temperatura y presión se unen en forma de gas y originan una explosión, él sabe también por eso mismo que ello tendrá lugar *siempre y en todas partes*.[22] Este autor señala que el saber en cuestión no depende de si el hecho se producirá una vez o se repetirá millones de veces no importa en qué cuerpos celestes. Siguiendo ideas de Engels, Davydov (1981, p. 284) plantea que en este caso se habla de "saber y del ascenso mental de lo singular a lo particular y luego a lo universal […]".

Al decir de Davydov (1981, p. 302) "los distintos sistemas simbólicos (materiales, gráficos) son medios de "patronización", y, por tanto, de idealización de los objetos materiales, medios de transferencia de los mismos al plano mental". Este autor quiere subrayar el hecho de la actividad humana en la elaboración de los conceptos y, en consecuencia, resaltar la idea de movimiento en dicha actividad, lo cual conlleva, necesariamente, la utilización de símbolos para expresar características de los objetos generales. En palabras de este autor, "hay que tener en cuenta que los símbolos expresivos de lo general en los objetos son ellos mismos formas de la actividad humana" (Davydov, 1981, p. 303).

Por eso, como lo sugiere Radford (2013a), los conceptos de saber, conocimiento y actividad son fundamentales en el andamiaje de la teoría cultural de la objetivación. En efecto, para Radford (2013a, p. 10) "saber es movimiento codificado". Es así como Hegel (1830/2009)

[22] Cursivas del original.

lo consideraba. Además, sugiere Radford (2012, p. 10) que el saber es "un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente.

Si consideramos, siguiendo a Radford, el saber como movimiento, mera posibilidad, entonces de acuerdo con este autor, el saber está constituido de formas siempre en movimiento de reflexión y acción histórica y culturalmente codificadas. El saber como pura posibilidad puede adquirir realidad a través de la actividad concreta—la actividad que mediatiza el saber y el conocimiento. Otra manera de decir esto es que el saber es labor cristalizada. Decimos, de acuerdo con Radford (2013a, p. 12), que el saber "es una forma ideal de acción, opuesto a las acciones en sí mismas".

Por ejemplo, el pensamiento algebraico es labor humana cristalizada, esto es, formas de acción, pensamiento y reflexión que han quedado codificadas en la cultura. El pensamiento algebraico como forma cultural codificada de pensamiento, ha sido desarrollado y refinado en el curso de la historia cultural. Éste pre-existe en una forma ideal desarrollada antes de que los estudiantes participen de actividades de clase.

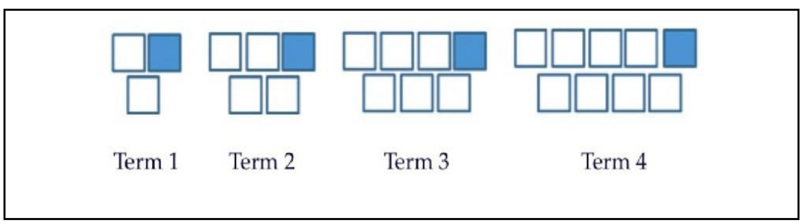


Figura 5. Secuencia figural con apoyo tabular presentada en Radford (2013a)

Según Radford (2013a), es este saber que encuentran los estudiantes en la escuela que los llevaría ver que el término 100 de la secuencia mostrada en la Figura 5, por ejemplo, tiene $1 + 2 \times 100$ cuadrados.

La Figura 6 intenta capturar la relación entre lo General, lo Particular, y lo Singular o Individual de la terna hegeliana. Lo General (el saber), como ya hemos señalado, es pura posibilidad. Lo singular (conocimiento), según Radford (2013a), es el contenido conceptual concreto que conlleva, en su materialidad, la naturaleza abstracta de lo general. Según

Maybee (2009, citado por Radford, 2013a), es el contenido de lo general, que se manifiesta en la reflexión teórica sensorial, la manera en que lo general tiene realidad. Radford (2013a) argumenta que como actividad, lo Particular es la mediación entre lo General y el Singular. Esta mediación es fundamental, ya que hace hincapié en la naturaleza mediada del conocimiento.

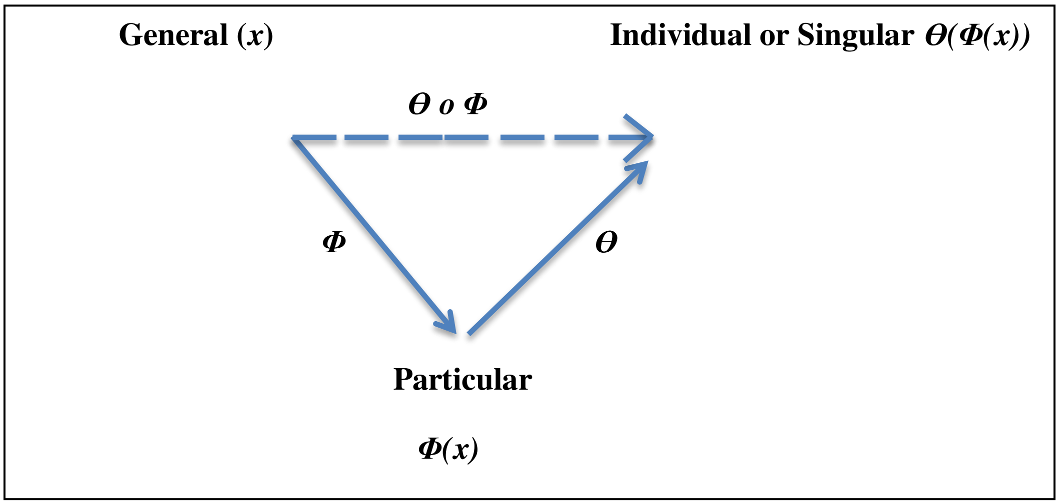


Figura 6. Lo General, el Particular y el Singular de la terna hegeliana en Radford (2013a)

En una interpretación arriesgada podemos señalar que la Figura 6 comporta el objeto cultural u objeto matemático u objeto de saber en su totalidad. En términos de Hegel (1817/2004, p. 111):

> El concepto como tal, contiene los momentos de la universalidad, libre igualdad consigo mismo en la propia determinación –de la particularidad, determinación en la cual la universalidad resta, sin ser perturbada, igual a sí misma-; y de la individualidad, como reflexión en sí de las determinaciones de la universalidad y particularidad.

Y más adelante señala (Hegel, 1817/2004, p. 112):

> Universalidad, particularidad e individualidad, tomadas abstractamente, son lo mismo que identidad, diferencia y razón de ser. Pero la universalidad es lo que

> es idéntico consigo mismo, con la expresa significación de que en lo universal está a la vez contenido lo Particular y lo Individual. Lo particular es lo que es diferente, o la determinación; pero significando que es universal en sí y está como individual. Lo individual, por último, tiene la significación de sujeto y substracto, que contiene en sí el género y la especie y es él mismo sustancial.

Según Hegel (1817/2004, p. 114):

> El juicio abstracto es la proposición: lo singular es lo universal. Éstas son las determinaciones que el sujeto y el predicado tienen primeramente el uno para el otro, siendo tomados los momentos del concepto en su inmediata determinación o primera abstracción. […] lo individual es lo universal, o más determinantemente: el sujeto es el predicado (por ejemplo, Dios es espíritu absoluto).

La individualidad es lo que Radford (2013a), en la interpretación que hace de las ideas de Hegel, llama el conocimiento o el Singular. Por eso, para este investigador, el conocimiento es la *instanciación* o *actualización* del saber (p. 16). En estos términos, sugiere que el *conocimiento* (Radford, 2013a, p. 16) debe ser comprendido como:

(1) El significado del saber como algo general

(2) El proceso de su actualización, y

(3) El resultado de su actualización

La actualización es el proceso que Hegel llama el Particular, y la instanciación es lo que según Radford (2013a), Hegel llama el Singular o Individual. Por ello, el Particular como actividad imprime su huella en la instanciación del saber, o como diría Ilyenkov (1977), el conocimiento arrastra la huella de la actividad que lo medió. De acuerdo con Radford (2013a, p. 17), "el Particular como actividad demarca la manera en la cual el conocimiento instancia el saber". En términos más simples, la manera por la cual sabemos conocer algo (por ejemplo, resolver ecuaciones) es consustancial de la especificidad de los procesos del conocimiento (Radford, 2013a).

Argumenta Radford (2013a), siguiendo ideas de Hegel (1837/2001), que el saber como posibilidad, mera *potencialidad*, “no ha emergido aún a su existencia” (Hegel, 1837/2001, p. 36). Para que pueda emerger en la existencia y pueda ser *actual*, el saber tiene que ser instanciado a través de una actualización. Plantea Noel (1995, p. 104):

> […]La unidad nueva que acaba de producirse, o el concepto (Begriff), es por el contrario la libertad esencial. Está toda entera en cada una de sus determinaciones, y su presencia es manifiesta en todas. No es nada inmediato, ni dado, sino pura acción o puro movimiento.

El saber (el concepto) es movimiento, es evolución, por ello, desde un punto de vista didáctico, los conceptos u objetos culturales se presentan a los estudiantes como posibilidades. “El saber parece ser más bien algo que no está en nosotros, algo que debemos encontrar, algo que se nos hace *objeto* (es decir, se nos opone)” (Radford, 2013a, p. 23). En esta dirección, objetivación “es precisamente el proceso de reconocer lo que se nos hace objeto - sistema de ideas, significados culturales, formas de pensamiento, etc.” (Radford, 2013a, p. 23). Noel (1995, p. 105) en su trabajo sobre “La lógica de Hegel”, lo plantea en los siguientes términos:

> El concepto es ante todo lo Universal abstracto, la posibilidad indeterminada de todas las determinaciones, pero no es posibilidad pura, es decir, la simple abstracción del ser; él pone en sí mismo el momento de la particularidad, es decir, se determina.

Intentando aclarar lo dicho anteriormente, podemos afirmar que la clave está en la distinción entre lo filogenético y lo ontogenético. En efecto, desde el punto de vista filogenético, el saber tuvo que haberlo producido alguien, es decir, tiene una historia. Desde ese punto de vista, el saber es una cristalización de labores humanas –codificación, etc. Desde la mirada ontogenética, para el alumno, fenomenológicamente, al principio, el saber aparece como posibilidad solamente. La actividad de enseñanza-aprendizaje lo mira (el saber) filogenéticamente y lo posiciona como objeto de la actividad. El saber se revela al alumno, entonces, a través de la actividad de objetivación. Por lo que, por ejemplo, pensar algebraicamente es el saber, mientras que llegar a pensar es su objetivación.

La Figura 7 muestra dos relaciones, $\boldsymbol{\Phi}$ y $\boldsymbol{\Theta}$. Para Radford (2013a), con respecto a la relación $\boldsymbol{\Phi}$, en el nivel más general, el Particular es la manera en la cual lo General se nos muestra. Los fenomenologistas hablan de la "manifestación" (en el sentido más fuerte de este término), es decir, del modo de presencia del Ideal (el saber) en el mundo concreto. Si lo General es una forma de pensar algebraicamente acerca de secuencias (codificadas culturalmente), entonces el Particular es la actividad que requerirían el profesor y los estudiantes para lograr algún tipo de reflexión y acción que incorpore aspectos de este pensamiento algebraico. Es decir, lo General es mera posibilidad (de naturaleza virtual) y el Particular (Radford, 2103a) es un paso hacia adelante en la concreción de lo General.

El Particular como actividad se mueve hacia su objeto a través de la identificación de objetivos. Éstos pueden ser, en la Figura 7, continuando con el ejemplo del álgebra, resolver problemas sobre secuencias algebraicas. Por lo tanto, la estructura *objeto-objetivo-tarea* se corresponde con la relación $\boldsymbol{\Phi}$ de nuestra Figura. Según Radford (2013a), la relación $\boldsymbol{\Phi}$ relata la intención pedagógica de la actividad del salón de clase. Este investigador precisa que la relación, aplicada a lo general $\boldsymbol{x}$ (es decir, pensar algebraicamente sobre las secuencias) puede tomar distintos "valores" $\boldsymbol{\Phi(x)_1}, \boldsymbol{\Phi(x)_2}, \dots$ dependiendo de la implementación de la intención pedagógica de la actividad.

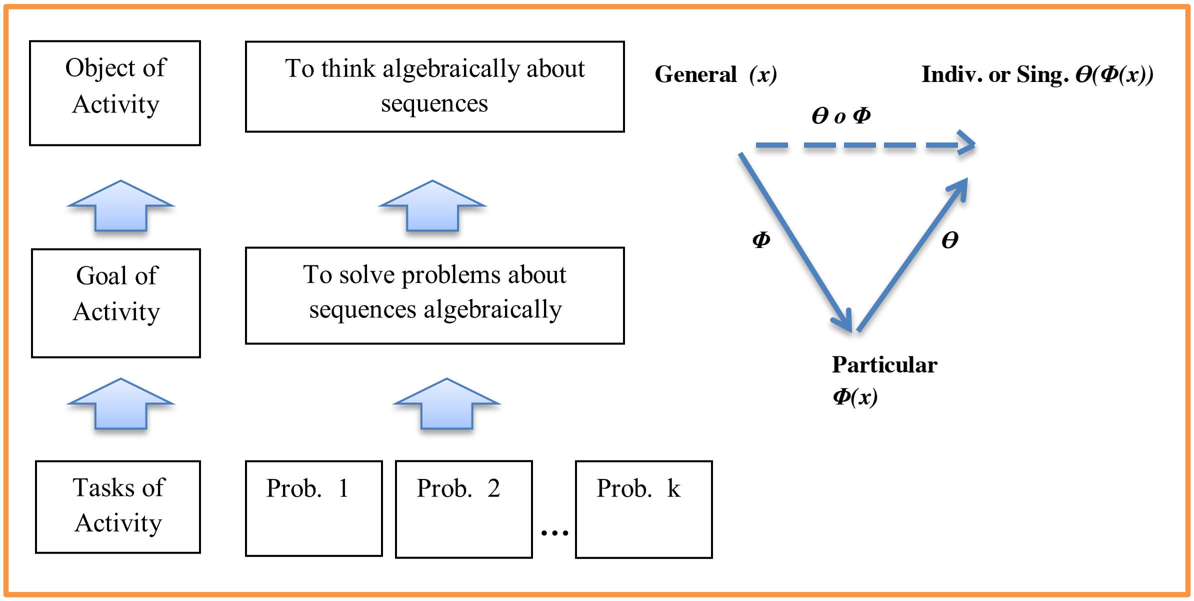


Figura 7. La estructura del Particular en Radford (2013a). El Particular como actividad particularizante se hace posible a través de las dos relaciones, Φ y Θ

Con respecto a la relación $\boldsymbol{\Theta}$, según Radford (2013a), el Particular se entiende como una actividad que *actualiza* el General en forma de una instancia individual o Singular y es lo que expresa esta relación en la Figura 7. La actividad es movimiento concreto actualizado, que lleva a una instanciación Singular del General. Dentro de la teoría la objetivación del saber, plantea Radford (2013a, p. 32):

> "La actualización del general es articulada como un proceso emergente de instanciación [del general]. El adjetivo "emergente" significa que el salón de clase es visto como un sistema que evoluciona a través de "estados" y que esta evolución no puede ser determinada de antemano. Profesores e investigadores pueden tener una idea, pero el proceso no es mecánico. Dependerá de cómo los estudiantes y los profesores se involucran en la actividad, de cómo ellos respondan uno al otro, etc.

Este investigador articula la relación $\boldsymbol{\Theta}$ del Particular de Hegel con el trabajo en las aulas de clase de matemáticas que ha realizado en sus investigaciones. Afirma que para el caso de la teoría cultural de la objetivación, usualmente se divide el salón de clase en pequeños grupos de 2, 3 o cuatro estudiantes. Sostiene Radford que el primer estado de $\boldsymbol{\Theta}$ consiste en una presentación de la actividad por el profesor. A continuación, los estudiantes son invitados a trabajar en pequeños grupos. Conformado así el salón de clase, el profesor visita varios grupos, cuestiona y retroalimenta a los estudiantes. En un cierto momento, el profesor puede invitar la clase a una discusión general donde los grupos pueden presentar sus ideas y otros grupos pueden desafiarlos o proponer una generalización. La lección puede terminar ahí o continuar con una discusión adicional en pequeños grupos. etc.

Las relaciones $\boldsymbol{\Phi}$ y $\boldsymbol{\Theta}$, que conforman la estructura del Particular de Hegel, podrían estar hablando de nuestras decisiones pedagógicas y didácticas para organizar nuestras aulas de clase. Popkewitz (2004) expone que a través de estas estructuras "empujamos" a los estudiantes a la actividad intelectual y conceptualizaciones matemáticas hacia algo establecido de antemano. En el caso aquí tratado de las tareas sobre secuencias de generalización de patrones, queremos que nuestros estudiantes lleguen a pensar algebraicamente, es decir, entren en contacto con esas formas culturales codificadas de movimiento.

De la argumentación desarrollada en nuestra sección 2.2 sobre la idea de cultura, podemos desprender que el conocimiento no es la consecuencia de las acciones adaptativas de un sujeto en el momento de resolver un problema, pues éstas son situadas dentro de las condiciones particulares de cada cultura. El conocimiento es realmente el resultado de una mediación. En este sentido, el aprendizaje (Radford, 2013a, p. 25) sería "la transformación subjetiva e idiosincrática del saber *"in itself"* en un saber *"for itsel"*, esto es, una transformación de un saber cultural objetivo en un objeto de la conciencia", es decir, un proceso de objetivación.

Esta idea de conciencia, muy estrechamente vinculada con la Fenomenología, encuentra sostén en Hegel (1817/2004): la Fenomenología es la "ciencia de la experiencia de la conciencia" (p. xxxvi). Más aún, cuando Hegel (1817/2004) habla de Fenomenología, considera al espíritu en su desarrollo desde las formas que toma conciencia sensible hasta las propias de la autoconciencia de la razón" (p. LI). En este proceso complejo, *el sujeto se topa con el objeto y el primero se transforma a través de la toma de conciencia progresiva*. Según Radford, para Hegel:

> La experiencia es la transformación que sufre el sujeto a raíz de su encuentro con algo que no es él. (Comunicación personal, 22 de Octubre de 2012)

Este es el proceso que Radford llama *subjetivación*. Rancière (1999, citado por Roth & Radford, 2011, p. 129) define la subjetivación como "la producción de un cuerpo (viviente); este cuerpo se produce a través de una serie de acciones. Estas acciones son aquellas del sujeto en sí mismo, así como las acciones de los otros y el mundo natural". Como señalan Roth & Radford (2011) "Subjetivación significa el desarrollo de un sujeto-en-actividad" (p. 135), lo que nos permite inferir que los procesos de subjetivación son procesos inacabados, perpetuos, continuos.

Ser (Being) y Becoming[23] son dos procesos de subjetivación teorizados por Radford (2013a). Ahora bien, sugiere este autor, de la misma manera en que existe una relación dialéctica entre el saber y el conocimiento, existe una relación entre el ser y el becoming. En la Figura 8 queremos expresar que así como el conocimiento es la instanciación del saber, becoming es la instanciación del ser. Y de la misma manera en que el saber se corresponde con formas codificadas de movimiento, el ser se corresponde con formas codificadas de alteridad (esto es, de relaciones con otros). Defiende Radford (2013a) que de la misma forma como el saber evoluciona cultural e históricamente, así lo hace también el ser.

[23] Al parecer no existe un término en el idioma español para la traducción de Becoming. Aunque *"Llegando a ser"* o *"Volviéndose"* podrían ser buenas traducciones, decidimos seguir utilizando el término en inglés que quiere significar un proceso inacabado o perpetuo.

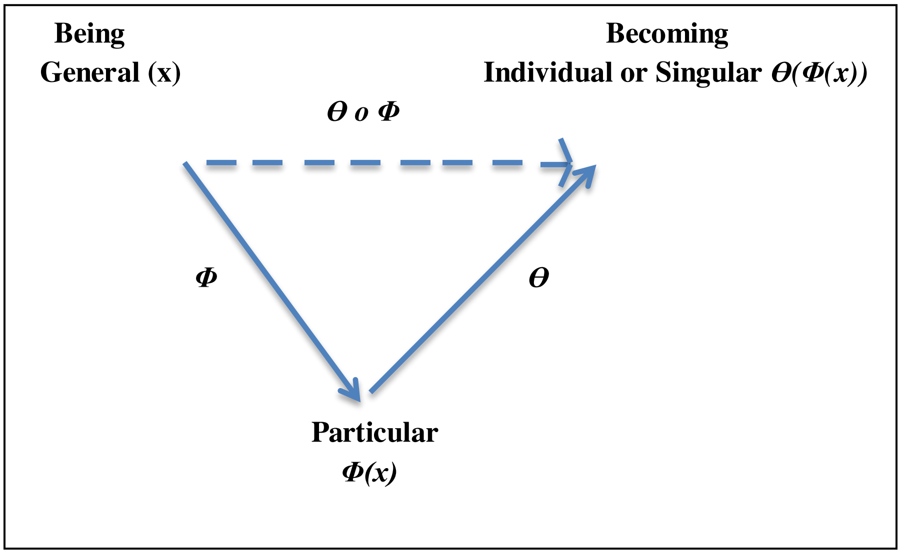


Figura 8. Conocimiento y Becoming como parte de un mismo proceso de objetivación-subjetivación

Es más, para este investigador, el aprendizaje sería a la vez conocimiento y becoming. Más específicamente, el aprendizaje ocurre en el curso de los procesos sensoriales o sensitivos o incorporando procesos de objetivación que están inmersos en procesos de subjetivación. En síntesis, para Radford (2013a), conocimiento y becoming ocurren juntos. Cuando el conocimiento y becoming no ocurren al mismo tiempo, cuando conocimiento y becoming están fuera de sincronía, sostiene este investigador, lo que tenemos es conocimiento alienado y estudiantes alienados. El producto de la actividad de los estudiantes aparece como algo extraño, como algo alejado de ellos. El saber "en sí mismo" y el ser "en sí mismo" permanecen separados de los estudiantes.

En la teoría cultural de la objetivación desarrollada por Radford, el ser se considera pura potencialidad, y es a través de la actividad (el Particular en la terminología de Hegel) que el ser es instanciado. El ser, en esta teoría, es aquel que se basa en atributos constituidos histórica y culturalmente. Vale la pena resaltar aquí que la actividad debe ser vista no como una simple cooperación entre individuos parta lograr algo, ni debe ser vista como un simple medio. La actividad debe ser considerada como una labor conjunta.

Para Radford:

> "La actividad es un proceso social cuyo propósito es alcanzar un objeto impregnado de entrada con significados culturales y conceptuales, objeto que se alcanza a través de acciones mediatizadas por sistemas semióticos depositarios de la historia cognitiva escrita en estos últimos por generaciones pasadas" (comunicación personal, 3 de marzo de 2011).

El acento de la teoría de la actividad en el sentido de Leontiev es puesto aquí de manifiesto. En el marco de esta teoría, tanto el *objeto* que se busca (por ejemplo, aprender a pensar de cierta manera o aprender a demostrar) como los *medios* que se utilizan para alcanzarlo, son *culturales*. Según Roth & Radford (2011), para Leontiev existen dos dimensiones principales de la teoría de la actividad: (a) *La actividad humana tiene estructura instrumental en la satisfacción de las necesidades de los individuos,* y (b) *la actividad está implicada en las relaciones con otros seres humanos*.

Marx & Engels (1970, citados por Radford, 2000a) sugieren que las investigaciones de lo que los individuos son, hacen, piensan y sienten en cualquier período histórico deben distinguir entre dos categorías generales relacionadas entre sí. Por una parte tenemos las *relaciones de producción*, referida a las formas culturales e históricas de la interacción humana y la cooperación, esto es, la normatividad y reglamentación entre individuos. De otro lado, tenemos los *modos de producción*, dimensión tecnológica o material a través de la cual las personas producen sus medios de subsistencia y satisfacen sus necesidades.

Estamos de acuerdo con Leontiev que la a*ctividad* es un proceso social, una secuencia dialécticamente interconectada de acciones mediatizadas a través de las cuales los individuos se relacionan no solamente con el mundo de los objetos sino también con otros individuos, adquiriendo, en el curso de ese proceso, la experiencia humana (Leontiev, 1978, 1983, citados en Radford, 2004b). Más específicamente, la actividad matemática de un sujeto es una forma de reflexión que envuelve lo individual como un todo, su conciencia, sentimientos, percepción, actividad sensoriomotora, inmersa en un sistema de significación cultural que orienta sus actos intencionales.

En lugar de asumir una función meramente de adaptación, catalizadora o facilitadora, en esta perspectiva teórica de la objetivación, consideramos la *interacción social* como *consustancial del aprendizaje* (Radford, 2006b). Este tipo de interacción social podemos analizarla desde dos conceptos teóricos (Radford & Roth, 2010): *the space of joint action* y *togethering*. The space of joint action se caracteriza como un verdadero espacio de intersubjetividad en donde "el pensamiento aparece como un fenómeno colectivo" (Radford & Roth, 2010, p. 6). Subraya el hecho de que la interacción se basa en una evolución, puesta a punto, y de intercambio de perspectivas de los participantes. Por su parte, togethering teoriza los eventos que sistemáticamente trascienden los límites del aquí y ahora. Este concepto da cuenta de "la manera ética en que los individuos se involucran, responden y ajustan el uno al otro, a pesar de sus diferencias cognitivas y emocionales" (Radford & Roth, 2010, p. 10).

2.4.3 El gesto como medio semiótico de objetivación y los constructos nodo semiótico y contracción semiótica. En uno de los foros de investigación del Congreso Internacional del PME-2005 (*International Group for the Psychology of Mathematics Education-2005*) se reconoce, como objetivo principal, la importancia del gesto en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. En el contexto del congreso, Arzarello & Edwards (2005) se interesaron en analizar de qué forma el gesto contribuye a la construcción de significado de conceptos matemáticos. La importancia del estudio del gesto reside en reconocer que por medio de él es posible materializar intenciones, además de ser un elemento integrante, no periférico, en las maneras de pensar de los estudiantes.

En particular, el gesto, como un medio semiótico de objetivación, juega un papel importante en la expresión de las intencionalidades de los sujetos y en su proceso de conceptualización. Por ejemplo, en la caracterización de gesto en el sentido otorgado por Kendon (1987), se hace corresponder este término con la idea de gesticulación, "los gestos que ocurren en asociación con el discurso y que parecen estar estrechamente relacionados con éste, como parte de la elocución, se denominan gesticulaciones" (Kendon, 1987, p. 75). Así, gesto y gesticulación son utilizados en este trabajo como sinónimos.

Vygotski (1978), en sus investigaciones relacionadas con el desarrollo de la percepción, detectó que niños de dos años de edad pudieron describir y reproducir las relaciones espaciales entre objetos ubicados en pinturas con el empleo exclusivo del lenguaje gestual (gesto). Cuando a los niños se les permitió el uso del lenguaje verbal (habla), Vygotsky reconoció que las palabras eran acompañadas de gestos que permitieron a los niños superar las dificultades ocasionadas por la comunicación verbal (Vygotsky, 1978, p. 32).

Por ejemplo, en concordancia con la observación de Vygotsky (1978), Kendon (1987, p. 83) establece que "el gesto, con frecuencia, es utilizado cuando las circunstancias en las que sucede la comunicación hacen difícil o imposible que las palabras verbales sean recibidas". De este modo, el gesto se convierte en una forma de comunicación tan importante como el habla.

Sin embargo, la importancia del gesto no sólo radica en su capacidad de superar las dificultades que se presentan en la comunicación verbal. Kendon (1980, citador por Miranda, 2009) señala que el gesto es importante debido a que no depende de la oración verbal; es capaz de comunicar ideas o representaciones mentales imposibles de comunicar con el habla. Kendon reconoce que el gesto, en el proceso elocutivo, es una manifestación diferente de la verbal. Dicho proceso puede caracterizarse como si "tuviera dos canales de salida dentro del comportamiento [humano]: uno a través del habla; el otro por medio del movimiento corporal [gesto]" (Kendon, 1980, p. 218).

La autonomía del gesto es reconocida, también, por McNeill (1985), quien asegura que, aun cuando el gesto y el habla están relacionados entre sí, los significados que cada uno tiene en la elocución son independientes uno del otro. Así, el emisor crea gestos para significar cosas distintas (o similares) de las que puede significar con su oración verbal (McNeill, 1985). Para Edwards (2005, p. 137), "los gestos forman parte de la solución de un problema matemático; no se restringen a ser "simples ilustraciones" de los objetos referidos en las explicaciones verbales".

El carácter mediador de los gestos en los procesos de resolución de problemas, es destacado por Radford (2005b, p. 143) cuando sostiene que:

> "Los gestos son parte de esos medios que permiten, a los estudiantes, objetivar el saber –es decir, les permiten darse cuenta de los aspectos conceptuales que, debido a su propia generalidad, no pueden ser completamente mostrados en el mundo concreto.

En los procesos de objetivación del saber, este investigador visibiliza en el papel de los gestos las intenciones de comunicación de algún aspecto de los objetos culturales, por ejemplo secuencias de patrones. Para Radford (2005b, p. 143):

> Ellos [los gestos] son elementos indispensables en el *proceso de objetivación* del saber de los estudiantes. Los gestos ayudan a los estudiantes a hacer visibles sus intenciones, a notar las relaciones matemáticas y a tomar conciencia de los aspectos conceptuales de los objetos matemáticos.

Según Miranda (2009), no obstante el importante papel del gesto en la adquisición del saber matemático, Radford (2005b) puntualiza que el gesto no es suficiente para dar cuenta de la forma en que los estudiantes aprenden matemáticas. Este investigador propone que el análisis del proceso de aprendizaje debe tomar en cuenta la relación del gesto con otros sistemas semióticos. Así mismo sugiere profundizar en la idea vygotskiana de la mente como una unidad de elementos materiales e ideacionales y destaca, en esta idea, que el enriquecimiento del uno implica el enriquecimiento del otro, en una especie de relación dialéctica.

De acuerdo con Alibali, Kita & Young (2000, citados por Radford, Edwards & Arzarello, 2009) "el gesto juega un rol en la producción discursiva porque juega un papel en el proceso de conceptualización. […] El gesto está involucrado en la planeación conceptual de los mensajes y ayuda a los sujetos a "empaquetar" información especial dentro unidades verbalizables" (p. 93). Siguiendo a McNeill (1985), Radford (2009, p. 113) plantea que "los gestos son una especie de ventana para acceder al pensamiento", idea que intenta visibilizar los trabajos pioneros de Vygotski (1978, p. 107) sobre la relación entre gestos y signos:

> A gesture is specifically the initial visual sign in which the future writing of the child is contained as the future oak is contained in the seed. […] The gesture is a writing in the air and the written sign is very frequently simply a fixed gesture.

Según Radford (2002), hay una variedad de recursos semióticos movilizados por los estudiantes y los profesores, como gestos, miradas, dibujos y modos extra-lingüísticos de expresión, que no cumplen los requisitos de las definiciones clásicas de los sistemas semióticos como se explica en literatura (por ejemplo, Duval, 1995/1999). Un aspecto importante que merece destacarse, por ahora, es que la forma en que tales sistemas semióticos diferentes se activan es *multimodal* (Arzarello, 2006).[24]

En este proceso, es necesario destacar que la elección de los signos no es neutra ni independiente, pues dicha elección determina el destino en el cual se expresa el pensamiento, es decir, el destino de la comunicación. En particular, el lenguaje algebraico impone una sobriedad a quien piensa y se expresa, en otras palabras, impone una sobriedad y economía en las formas de significación, hecho que fue impensable antes del Renacimiento.

Radford (2008b, 2010a, 2010b, 2010c) señala que los estudiantes tienen que compensar la reducción de recursos semióticos con una concentración de significados en el menor número de signos o palabras, dicha sobriedad y economía es lo que en la teoría de la objetivación se llama *contracción semiótica*. En este proceso de objetivación, en general, los gestos y el ritmo, por ejemplo, son excluidos y los estudiantes tienen que trabajar aquí

[24] La idea de multimodalidad será expuesta y desarrollada en el Capítulo 4 sobre el desarrollo de la investigación.

con formas reducidas de expresión. Este trabajo con formas simplificadas de expresión hace pensar en la contracción semiótica como un proceso de reorganización psíquica en el sujeto, lo cual lo lleva paulatinamente, pero no de manera homogénea, a una toma de conciencia del objeto cultural, en este caso una forma de pensar históricamente constituida y que ha quedado codificada en la cultura.

Radford (2012a) señala que en este proceso de objetivación se evidencia una evolución de la unidad de componentes materiales-ideacionales del pensamiento algebraico. La contracción semiótica, enfatiza Radford (2012a, p. 686):

> Es un proceso genético en el curso del cual se toman decisiones entre lo que se considera relevante e irrelevante, que conduce a una contracción de la actividad semiótica anterior, lo que resulta en una vinculación más refinada de los recursos semióticos. Implica un nivel más profundo de la conciencia y la inteligibilidad del problema en cuestión y es un síntoma de aprendizaje y de desarrollo conceptual.

Por otra parte, la movilización de los medios semióticos de objetivación podría darse en un mismo momento, es decir, de manera sincronizada. La idea de *nodo semiótico* (Radford, Demers, Guzmán & Cerulli, 2003) es un intento de teorizar la interacción de sistemas semióticos en la objetivación del saber. Un nodo semiótico (Radford, 2000, p. 121) “es una pieza de la actividad semiótica de los estudiantes donde la acción y diversos signos (por ejemplo, gesto, palabra, fórmula) trabajan juntos para lograr la objetivación del saber”.

Con la idea de nodo semiótico queremos revelar cómo los signos y los artefactos son usados por un sujeto en sus procesos de objetivación del saber o, más específicamente, nos interesa comprender y explicar el papel que juega el recurso a los signos y las formas de significación en la toma de conciencia de los objetos culturales. De acuerdo con Radford (2008b), la contracción semiótica se puede entender como la evolución de los nodos semióticos, en tanto la sobriedad en el pensamiento está ligada a la manera como los recursos semióticos van evolucionando de fórmulas corpóreas hacia fórmulas más sofisticadas.

2.4.4 Sobre el pensamiento algebraico. Coincidimos con Radford (2010b) cuando reconoce que los objetos matemáticos son objetos «generales», y la actividad matemática es esencialmente simbólica. Este investigador plantea, además, la necesidad de reflexionar explícitamente sobre la relación dialéctica entre el desarrollo del pensamiento algebraico y los procesos de generalización.

Según Radford (2011, p. 318), lo que distingue el pensamiento aritmético del algebraico es el hecho de que en este último se tratan cantidades *indeterminadas* de una manera *analítica*. En otras palabras, se consideran cantidades indeterminadas (e.g., incógnitas o variables) como si fueran conocidas y realizamos cálculos con ellas como lo hacemos con números conocidos. Argumenta, a partir de los trabajos de Viète (1591/1983) y Descartes (1637/1954), que en este tipo de pensamiento no hay diferenciación entre números conocidos y desconocidos. Esta es la razón por la cual Viète y otros matemáticos en el siglo XVI (Radford, 2010b) se refiere al álgebra como un arte analítico. Se infiere, entonces, que la diferencia entre la aritmética y el álgebra no puede darse en términos de notaciones, como a menudo se piensa. Sostiene que el simbolismo algebraico alfanumérico que conocemos hoy en día es de hecho una invención reciente, por lo que podemos afirmar que "el nacimiento del álgebra no es el nacimiento de su simbolismo moderno" (Radford, 2012a, p. 677). Este autor argumenta que los matemáticos chinos antiguos movilizaron ideas algebraicas para resolver sistemas de ecuaciones sin utilizar notaciones. Así mismo, Radford relata que escribas babilonios utilizaron diagramas geométricos para pensar algebraicamente.

Es decir, no es ni necesaria ni una condición suficiente el uso de letras en álgebra para pensar algebraicamente. Como lo sostiene Radford (2012a, p. 677), "nuestro moderno simbolismo algebraico nos permite llevar a cabo transformaciones de expresiones que pueden ser difíciles o imposibles con otras formas de simbolismo". No obstante, el objetar la idea que las notaciones son una manifestación del pensamiento algebraico abre posibilidades o nuevas vías para la investigación de las formas elementales de pensamiento algebraico en estudiantes jóvenes.

Es importante señalar que el surgimiento del simbolismo algebraico fue una manera de reflexionar acerca del mundo, una manera que fue pensable en el contexto de un mundo en el que máquinas y nuevas formas sociales de distribución del trabajo transformaron radicalmente la experiencia humana. Al decir de Serfati (1999), la gran ventaja del simbolismo de Bombelli y Viète reside en que éste hace posible ´un fuerte automatismo en los cálculos´, de ahí que el concepto de eficiencia en los cálculos algebraicos tiene razón de ser como un concepto cultural. Es decir, se manipulan los símbolos como manipular productos manufacturados, en tanto no es necesario saber cuáles son los objetos o qué representan, lo que interesa, en este caso, es operar con ellos, manipularlos.

En esta investigación asumimos el *pensamiento algebraico* como una forma particular de reflexionar matemáticamente. Desde nuestras consideraciones filosóficas podemos aseverar que el pensamiento algebraico, en tanto saber, es un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente. De acuerdo con Radford (2010b), el pensamiento algebraico está caracterizado por tres elementos (o vectores) estrechamente relacionados:

- El sentido de *indeterminancia* (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetro) aquello como opuesto a la determinancia numérica.
- La *analiticidad,* como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos.
- La *designación simbólica* o *expresión semiótica* de sus objetos, esto es, como la manera específica de nombrar o referir los objetos.

Radford (2011) plantea que la indeterminación y el carácter analítico están ligados en un esquema o *regla* que permite a los estudiantes tratar con cualquier figura de la secuencia, cualquiera que sea su tamaño. Es una regla ejemplificada en casos particulares (p. e., 12 más 12, más 1), donde los números son tratados no como meros números sino como constituyentes de algo más general. Es más, el sentido de la indeterminancia, plantea Radford (2010b), refiere a una *sensación de indeterminación que es propio de los objetos algebraicos básicos como incógnitas, variables y parámetros*.[25] Esta indeterminación hace posible, por ejemplo, la sustitución de un objeto variable o desconocido por otro, sin embargo, señala Radford (2010b), no tiene sentido sustituir 3 por 3.

En este sentido, desde esta caracterización, el pensamiento algebraico abre nuevas posibilidades para repensar la forma en que las cantidades indeterminadas pueden ser significadas por los estudiantes jóvenes. A juicio de Radford (2012a), es aquí donde entra en escena la semiótica, en tanto ésta se interesa, como lo señala Eco (1988), por la comprensión de la manera en que las personas significan (y comunican). Radford (2010b) insiste en que estos signos pueden ser letras, pero no necesariamente, pues el uso de letras no equivale a hacer álgebra.

Radford (2010a) reconoce tres formas de pensamiento algebraico o estratos caracterizados por los medios semióticos de objetivación movilizados por los sujetos en su actividad reflexiva, incluyendo percepción, movimientos, gestos, lenguaje natural. Postulamos que la contracción semiótica, como proceso de objetivación, se desarrolla cuando se pasa de un estrato a otro. La tipología de formas de pensamiento algebraico propuesta por Radford está en estrecha conexión con los tres vectores o componentes analíticos que lo caracterizan. Estas formas de pensamiento algebraico son las siguientes:

1) *Pensamiento algebraico Factual*. Los medios semióticos de objetivación movilizados son los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras. En este estrato de pensamiento la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación, pues se expresa en acciones concretas, por ejemplo, a través del trabajo sobre números; por lo que podemos afirmar que en este estrato la indeterminancia queda implícita. Por ejemplo, el alumno señala con la mirada, con su índice, realiza movimientos con un lápiz, dice “aquí”, señala y dice “más 2”.

[25] El énfasis es mío.

2) *Pensamiento algebraico Contextual*. Los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios semióticos de objetivación tales como frases "clave". En este estrato de pensamiento la indeterminancia es explícita, se vuelve objeto del discurso. La formulación algebraica es una descripción del término general. Por ejemplo, el estudiante dice *"arriba quito uno"* o *"dos por la figura más uno"*, o *"# de la figura + 1 para la fila de arriba y # de la figura + 2 para la de abajo. Sumar los dos para el total"*. Esto significa que los estudiantes en este estrato de pensamiento tienen que trabajar con formas reducidas de expresión, lo cual sugiere pensar en la idea de contracción semiótica, en tanto hay evolución de nodos semióticos.
3) *Pensamiento algebraico Simbólico*. Las frases "clave" son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra. Por ejemplo, mediante expresiones como: $n+(n-1)$ ó $2n-1$. Según Radford (2010a, p. 8), en este estrato de pensamiento "hay un cambio drástico en la manera de designar los objetos del discurso", a través de signos alfanuméricos del álgebra, lo cual hace pensar en otro estado del proceso de objetivación de contracción semiótica.

2.4.5 Sobre la generalización algebraica de patrones. Según Radford (1997), *generalizar* significa observar algo que va más allá de lo que realmente se ve. Ontogenéticamente hablando, este acto de percibir se desarrolla a través de un proceso durante el cual el objeto por ser visto emerge progresivamente. La generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela (Radford, 2010b), pues, entre otros aspectos, posibilita a los estudiantes acercarse a situaciones de variación que se erigen como importantes para el desarrollo del pensamiento algebraico. Esto sugiere poner atención en los procesos que dan lugar a la emergencia del pensamiento algebraico en la escuela. De acuerdo con Radford (2008b, 2013b), la generalización algebraica de patrones comporta:

1. Capturar o identificar una comunalidad o característica común, notada sobre algunos elementos de una secuencia. Esta toma de conciencia de una propiedad común se nota a partir de un trabajo en el terreno fenomenológico de observación sobre ciertos términos particulares (por ejemplo, $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$).

2. La generalización o aplicación de esta comunalidad a todos los términos de la secuencia que está en consideración, es decir, a los términos subsecuentes de la secuencia $(p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \ldots)$, y

3. La capacidad de usar esa propiedad común a fin de *deducir una expresión directa*[26] que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia.

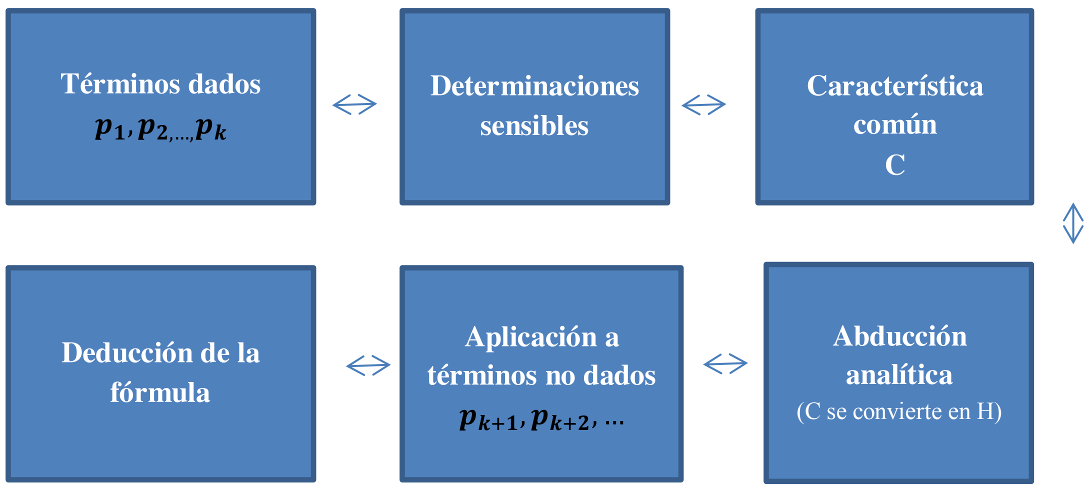


Figura 9. Estructura de la generalización algebraica de secuencias figurales presentada en Radford (2013b)

La generalización de la "comunalidad" a todos los términos es la formación de lo que, en la terminología aristotélica, se llama un género, es decir, aquello en virtud de la cual los términos se mantienen unidos (Radford, 2010b). En otras palabras, la generalización algebraica de un modelo se basa en darse cuenta de una comunalidad local, que luego se generaliza a todos los términos de la sucesión y que sirve como una orden para construir expresiones de los elementos de la secuencia que siguen estando fuera del campo perceptivo. La identificación de la característica común o comunalidad requiere, según Radford (2013b), hacer una escogencia entre determinaciones sensibles potenciales. “La generalización de la característica común (que puede ser una o varias) corresponde a lo que Peirce llama una abducción, esto es, algo que es solamente plausible” (Radford, 2013b, p. 6).

[26] Énfasis en el original.

Plantea este autor (Radford, 2013b, p. 7):

> Para que la generalización sea algebraica se requiere […] que la abducción que se hace de la característica común sea utilizada de manera *analítica*.[27] Esto quiere decir que la abducción será utilizada ya no como simple posibilidad, sino como principio asumido para deducir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier término. Como vemos, el punto crucial corresponde al papel epistemológico que desempeña la característica común, C, extraída durante el trabajo efectuado en el terreno fenomenológico. C pasa de entidad plausible a principio asumido, esto es hipótesis, H.

De acuerdo con la definición de generalización algebraica de patrones, podemos hablar también de generalizaciones Factuales y Contextuales. Un generalización de tipo Factual es aquella en la cual hay evidencia de una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional, esquema que permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos, a términos deícticos, gestos y actividad perceptual (Radford, 2003) como medios semióticos de objetivación. Lo general o lo indeterminado en este estrato de generalización quedan sin nombrar. Las generalizaciones Contextuales, por su parte, suponen un nivel más avanzado, sin alcanzar el nivel de las generalizaciones simbólicas algebraicas; en este caso "se generalizan no sólo las acciones numéricas sino también los objetos de las acciones" (Radford, 2003, p. 65). Estas generalizaciones "van más allá del dominio de las figuras específicas o particulares y tratan con objetos genéricos (como la figura) que no pueden ser percibidos por nuestros sentidos" (Radford, 2003, p. 65).

Como lo plantea Radford (2010b), es posible encontrar casos de producciones matemáticas en estudiantes que no presentan las características de nuestra definición de la generalización algebraica de patrones. Radford sugiere que estos estudiantes aún no han entrado en el reino del álgebra, en tanto pueden estar trabajando en el ámbito de la aritmética al intentar generalizar algo. Si bien lo generalizado puede ser una comunidad local, observada en algunas figuras, esto podría no garantizar la utilización de dicha información para

[27] Énfasis en el original.

proporcionar una expresión que permita calcular cualquier término de la secuencia. En este sentido, señala Radford (2010b), estamos frente a una *generalización aritmética*.

También es posible identificar algunos esfuerzos por parte de los estudiantes cuando intentan describir una expresión general para calcular el número de círculos (cuadrados) correspondiente a cualquier término de una secuencia dada. Plantea Radford (2008b) que en este esfuerzo algunos estudiantes pueden realizar procesos de abducción que parecen más meras adivinanzas, las cuales no conducen a la regla que genera todos los términos de la secuencia, pues ninguna de estas adivinanzas es el resultado de la inferencia de la comunalidad acerca de los primeros (tres o cuatro) términos de la secuencia. En este caso, dice Radford (2013b), los alumnos producen una fórmula (inclusive usando signos alfanuméricos del álgebra) pero tal fórmula no es deducida; "de hecho, la abducción concierne la fórmula misma" (Radford, 2013b, p. 7). Esta regla, obtenida por inducción, lleva consigo un procedimiento basado en el razonamiento probable (o plausible), cuya conclusión va más allá de lo que está contenido en sus premisas. Éste es un tipo de inducción que Radford (2008b) llama *inducción ingenua*. El adjetivo (ingenua) quiere enfatizar la distinción con otros tipos más sofisticados de inducción.

Capítulo 3
Diseño de la Investigación

3.1 Introducción

En este capítulo informamos acerca de la manera como diseñamos nuestra investigación. El estudio lo enmarcamos en un enfoque de investigación cualitativa, de tipo descriptivo e interpretativo (Ernest, 1991). La investigación en este enfoque construye una rica descripción del fenómeno o problema didáctico bajo estudio, en este caso, la emergencia de formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos jóvenes (9-10 años). Es decir, estamos interesados en el significado y la interpretación que hacen nuestros estudiantes cuando abordan las tareas sobre generalización de patrones que proponemos, al mismo tiempo que hacemos énfasis sobre la importancia del contexto y los procesos que desarrollan.

La opción de abordar en esta investigación secuencias figurales y numéricas lineales reside fundamentalmente en que estos tipos de secuencias representan situaciones propicias para la emergencia de formas de pensamiento algebraico (Radford, 2010a, 2010b, 2010c, 2012a). Esta razón es también apoyada por las sugerencias investigativas que plantea el profesor Luis Radford, expuestas en el apartado 1.1 del planteamiento del problema de investigación.

Desde la perspectiva de Goetz & Lecompte (1988) capitalizamos el proceso de fiabilidad, al mejorar el proceso investigativo proporcionando información suficiente en relación con: tareas sobre generalización de patrones en las que se desarrolla la experiencia; la selección de la población (estudiantes de 4° y 5° de primaria de un colegio privado de Bogotá, Colombia); los métodos de recolección de datos y el análisis de los mismos; la posibilidad de revisión del trabajo por otros investigadores.

La validez, por su parte, se fortalece al realizar una permanente comparación de los datos y una descripción lo más profunda y detallada posible del análisis realizado. De acuerdo con Soneira (2006), es necesario hacer máxima la explicación y comprensión de un fenómeno con el mínimo de conceptos y formulaciones. Esta idea o criterio de parsimonia (Soneira, 2006, p. 157) es fundamental en el proceso de comparación de los datos a través de similitudes y diferencias, por ejemplo, con los estratos de pensamiento algebraico Factual y Contextual.

Dado que en nuestra aproximación vygotskiana asumimos la tesis según la cual el pensamiento se puede desarrollar en la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) a través de la interacción verbal de maestros y alumnos y de los alumnos entre sí, planteamos como recurso didáctico una serie de tareas las cuales ponen unas condiciones con el propósito de que ocurra cierto fenómeno. Para el caso de esta investigación, que los estudiantes nombren o nominen la indeterminación o, más generalmente, movilicen otras formas de pensamiento relacionadas con la generalización de patrones. Esta dimensión corresponde a la relación Φ dentro de la estructura del Particular hegeliano que adoptamos en nuestro marco teórico. Por eso entendemos que la teleología del significado no sólo reposa en las tareas diseñadas sino también en la actividad tal cual como se desarrolla (evento) y en la organización didáctica de esa actividad. Esta dimensión corresponde a la relación Θ en la estructura del Particular. Por supuesto, indagar por la manera como los estudiantes modifican sus formas de pensamiento algebraico, debe considerar las dos relaciones Φ y Θ dentro de la estructura del Particular hegeliano.

A continuación presentamos, en la primera sección, un análisis de las tareas que propusimos en la fase de pilotaje, lo que nos arrojó elementos para ganar en sensibilidad analítica y tomar algunas decisiones en relación con el diseño de tareas subsiguientes. En la segunda sección de este capítulo damos cuenta de este diseño y de su justificación teórica. La población, la naturaleza de las sesiones de trabajo y el proceso llevado a cabo de recolección de la información se expone en la tercera sección.

En la última parte de este capítulo informamos sobre la constitución de los datos y la descripción del análisis de los mismos. Visibilizamos el proceso de codificación abierta desde los planteamientos de Glaser & Strauss (1967) y Soneira (2006), precedido por el criterio de foco teórico al tener en consideración de manera permanente nuestra pregunta y objetivo de investigación.

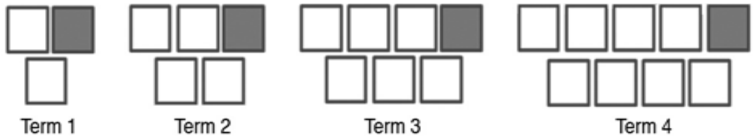
3.2 Fase de pilotaje

El pilotaje lo llevamos a cabo en el mes de noviembre de 2010. El grupo con el cual trabajamos estuvo conformado por doce estudiantes, de edades comprendidas entre los 9 y 10 años, de un colegio privado de la ciudad de Bogotá (Colombia), quien prestó su colaboración para realizar la actividad. Las tareas propuestas intentaban involucrar a los estudiantes en una actividad que posibilitara la discusión en pequeños grupos, conocer más de cerca el proceso o los procesos a través del(os) cual(es) los estudiantes ganaban confianza en el trabajo que desplegaban; nos interesaba detectar la emergencia de algunos medios semióticos de objetivación, depurar las preguntas que planteábamos y prever ciertas dificultades asociadas con la configuración de las secuencias.

Las tareas, planteadas a los grupos de estudiantes (dos por grupo), tomadas y ajustadas de las investigaciones que ha adelantado el profesor Luis Radford, se distribuyeron, la primera a tres grupos y la segunda a los restantes tres. En la primera parte de ambas tareas presentamos una secuencia figural apoyada por representación tabular (lo que Radford (2008b) llama secuencia figural) y luego, en la segunda parte, presentamos la misma secuencia pero numérica apoyada por representación tabular (Radford (2008b) la denomina secuencia numérica). La primera tarea planteaba la sucesión $(2n+1)_{n=1,2,\dots}$ y la segunda, la sucesión $(2n+4)_{n=1,2,\dots}$

Nombre: ____
Edad: ______________________
Curso: _____________________
Fecha: ___________________

Observa detenidamente la siguiente secuencia:



Siguiendo la secuencia,

(a) Dibuja la figura correspondiente al término 5
(b) Dibuja la figura correspondiente al término 6
(c) Calcula el número de cuadros de la figura correspondiente al término 9
(d) Calcula el número de cuadrados de la figura del término 100
(e) Explica la forma como procediste para encontrar la respuesta de la pregunta anterior

Ahora tienes la siguiente secuencia de números, en donde el número 3 ocupa la posición 1, el número 5 la posición 2, el 7 ocupa la posición 3, el 9 la posición 4, y así sucesivamente:

3	*5*	*7*	*9*
Posición 1	Posición 2	Posición 3	Posición 4

Responde:

(a) ¿Cuál es el número que ocupa la posición 5?, ¿cuál ocupa la posición 6?
(b) ¿Cuál es el número que ocupa la posición 9?
(c) ¿Qué número ocupará la posición 100?
(d) Explica la forma como procediste para encontrar la respuesta a la pregunta anterior

La respuesta de un grupo de estudiantes (Figura 10) a los ítems (a) y (b) evidencia que logra capturar el patrón, lo cual le permite dibujar las figuras correspondientes a los términos 5 y 6.

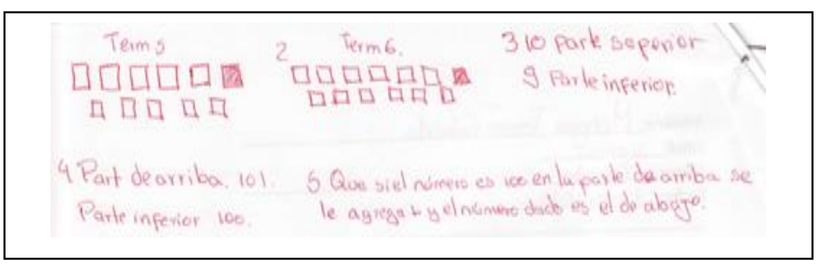


Figura 10. Respuesta de un grupo de estudiantes a los ítems de la primera parte de la primera tarea propuesta en el pilotaje

El recurso del cuadro sombreado propuesto en la secuencia figural apoyada por representación tabular le permite más fácilmente contar los cuadros de arriba y los de abajo (que corresponde al mismo número). En relación con el ítem (c), *"calcula el número de cuadros de la figura correspondiente al término 9"*, este grupo responde *"10 en la parte superior 9 en la parte inferior"* y sobre el ítem (d), responde *"Parte de arriba 101. Parte* *inferior 100"*. El ítem (e) exigía explicar la manera como se procedió para encontrar la respuesta al ítem anterior.

En relación con el ítem (e), una respuesta como *"que si el número es 100 en la parte de arriba se le agrega 1 y el número dado es el de abajo"*, pone en evidencia la movilización de deícticos espaciales y la identificación de la comunalidad pues el grupo establece la relación entre las figuras mirando inicialmente la relación entre el número de cuadros de la fila superior y el número de cuadros de la inferior. Los elementos geométrico-espaciales que ofrecen este tipo de secuencias y que les permite a los estudiantes "operar" y movilizar recursos semióticos (gestos como señalamientos y palabras) nos hace pensar que son buenas candidatas para proponer en el trabajo de campo.

En relación con la segunda parte de esta tarea, los estudiantes ya no cuentan con el recurso geométrico que había sido de alguna manera útil con la secuencia de la primera parte.

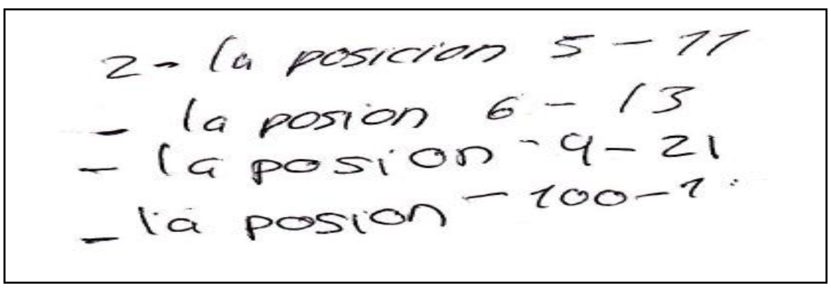
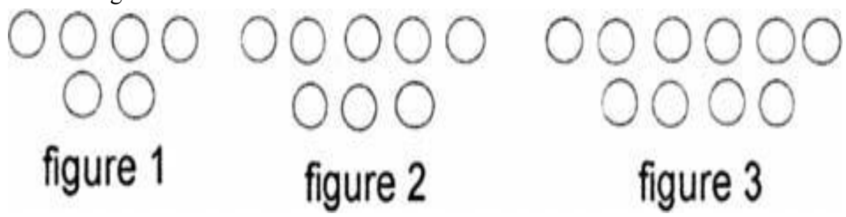


Figura 11. Respuesta de un grupo de estudiantes a los ítems de la segunda parte de la primera tarea propuesta en el pilotaje

Los estudiantes, por lo general, realizan un proceso de conteo, fortalecido con el establecimiento de una función que relaciona el número de la posición con el número correspondiente. Aquí los estudiantes identifican rápidamente la comunalidad a partir de las relaciones entre los números, y se afincan en este contexto (numérico) para establecer estas relaciones, por ejemplo, reconocen el aumento de 2 de número a número.

Nombre: ____
Edad: _______________________
Curso: _______________________
Fecha: _______________________
Observa detenidamente la siguiente secuencia de óvalos:



Siguiendo la secuencia,

(a) Dibuja el número de óvalos correspondiente a la figura 4
(b) Dibuja el número de óvalos correspondiente a la figura 5
(c) Calcula el número de óvalos correspondiente a la figura 9
(d) Calcula el número de óvalos correspondiente a la figura 100
(e) Explica la forma como procediste para encontrar la repuesta de la pregunta anterior

Observa la siguiente secuencia de números de acuerdo con su posición:

6	***8***	***10***
Posición 1	Posición 2	Posición 3

Responde:

(a) ¿Cuál es el número que ocupa la posición 4?, ¿cuál ocupa la posición 5?
(b) ¿Cuál es el número que ocupa la posición 9?
(c) ¿Qué número ocupará la posición 100?
(d) Explica la forma como procediste para encontrar la respuesta a la pregunta anterior

El abordaje de los estudiantes de la segunda tarea (con la sucesión $(2n+4)_{n=1,2,\dots}$), permite evidenciar la movilización de un medio semiótico de objetivación como lo es la inscripción, mostrado por el encerramiento de los tres círculos de arriba de la Figura 12.

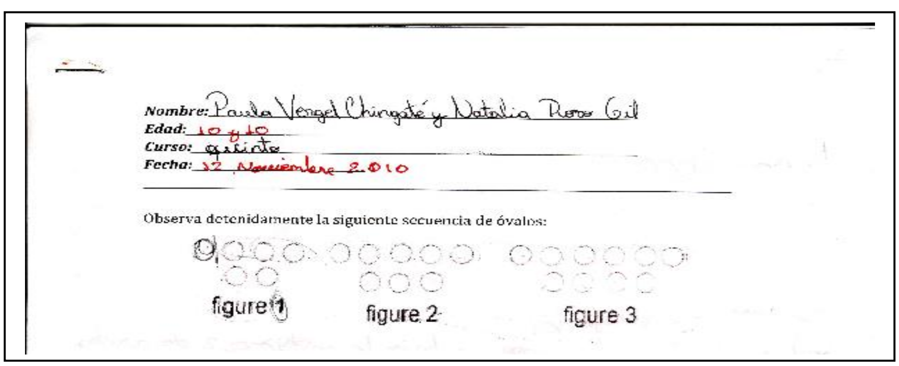


Figura 12. Movilización del gesto inscripción de un grupo de estudiantes encerrando tres círculos de la figura 1

En términos de Radford (2008, 2013a), el medio semiótico inscripción nos da un indicio de que los estudiantes están instanciando una forma de pensamiento algebraico Factual. En este caso, la indeterminancia queda implícita y no alcanza el nivel de la enunciación.

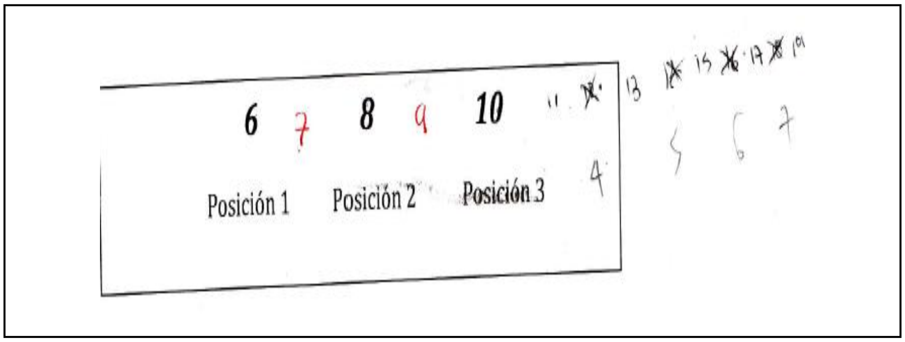


Figura 13. Acción de tachar que permite a un grupo de estudiantes responder a los ítems (a), (b) y (c) de la segunda parte de la segunda Tarea del pilotaje

La acción de tachar en la Figura 13 les permite a los estudiantes establecer una relación entre la posición y el número que ocupa dicha posición. De esta manera afirman (ver Figura 14) que se deben poner los números de 2 en 2 hasta 100; la cual se constituye en la forma de responder al ítem (d).

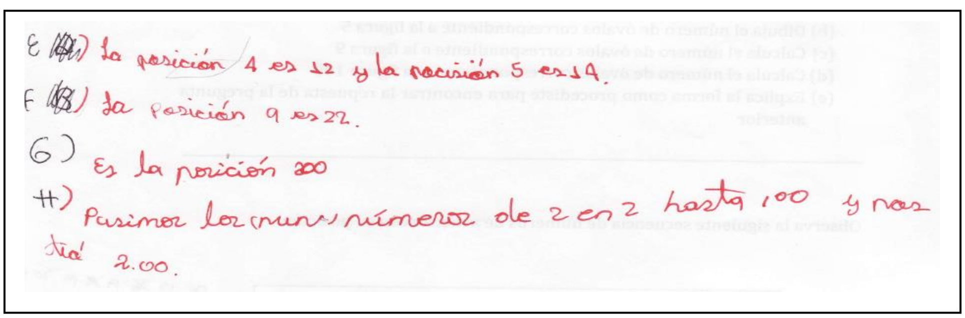


Figura 14. Respuesta de algunos estudiantes a los items de la segunda parte de la segunda Tarea del pilotaje

La aplicación de las tareas precedentes nos permite corroborar las hipótesis que nos habíamos formulado relacionadas con la emergencia de medios semióticos de objetivación al el momento de abordarlas. La movilización de estos recursos semióticos se hace importante en el contexto de la investigación y nos autoriza para tomar decisiones respecto del tipo de tareas a proponer. Reconocemos que es pertinente en nuestro trabajo de campo propiciar espacios tanto para el trabajo individual como en pequeños grupos. En el primer caso posibilitamos que los estudiantes, individualmente, hagan sus interpretaciones y produzcan propuestas de solución que luego serán confrontadas con las de los demás compañeros. Las diversas socializaciones se hacen necesarias a la luz de nuestro marco teórico. En términos bajtinianos (Bajtín, 1929/1992), el sujeto se desarrolla a partir de la presencia del otro compañero, de sus discursos y quizás de las maneras como ese otro inquiere los pronunciamientos del primero.

Dado que nuestro objetivo de investigación compromete las secuencias de generalización de patrones en cuatro contextos (secuencias figurales apoyadas por representación tabular, numéricas apoyadas por representación tabular, puramente numérica y puramente figural), ello nos motiva a proponer tareas en las cuales este tipo de secuencias tenga lugar. El interés es identificar y analizar, en cada caso, los recursos semióticos que movilizan los estudiantes en sus procesos de objetivación.

No obstante, debemos señalar que durante la investigación emergen dos tareas, la 4 (Problema del Mensaje) y la 7 (Problema del Mensaje al revés). Estas inicialmente no las habíamos considerado y resultaron importantes en términos de responder a nuestra pregunta de investigación. Declaramos que las dos tareas surgen a partir de las discusiones llevadas a cabo con el profesor Luis Radford. El Problema del Mensaje posibilitó que los estudiantes finalmente nombraran la indeterminancia de manera analítica y que la volvieran objeto de discurso. Por su parte, el Problema del Mensaje al revés favoreció el trabajo de usar la indeterminancia para producir los primeros cinco términos de una secuencia. En este problema, dado un mensaje (adaptado de uno de los mensajes producidos por los estudiantes en el Problema del Mensaje) en el cual la indeterminancia algebraica estaba explícitamente dada, los estudiantes debían identificarla y usarla.

3. 3 Diseño y justificación de las tareas

En términos generales, el diseño de tareas y la actividad propiamente como se desplegó corresponden a nuestra relaciones Φ yΘ, respectivamente, de la estructura del Particular hegeliano. Desde luego la fase de pilotaje y su respectivo análisis aportan su grano de arena para orientar el trabajo de campo. Nos interesaba en algunas tareas propuestas (por ejemplo, en las Tareas 1, 2 y 3) que los estudiantes lograran dibujar (o encontrar) los términos o figuras 5 y 6, pues estas acciones nos daba indicios para afirmar que habían capturado la comunalidad. Coincidimos con Goldin (1998, p. 57) en señalar que “la estructura de las tareas es un componente esencial para entender y hacer inferencias del comportamiento observado en la resolución de problemas”.

NOMBRE: ____

Edad: _________________ ***Curso:*** ________________ ***Fecha:*** _______________

Paula Alejandra presenta la siguiente secuencia

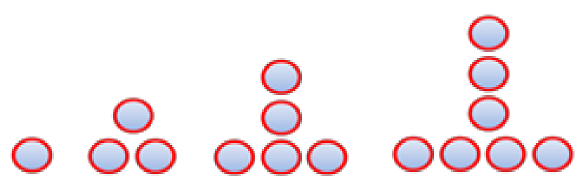


Fig ***1*** ***2*** ***3*** ***4***

1. Extiende la secuencia hasta la Figura 6

¿Cuántos círculos hay en la Figura 5? Respuesta:

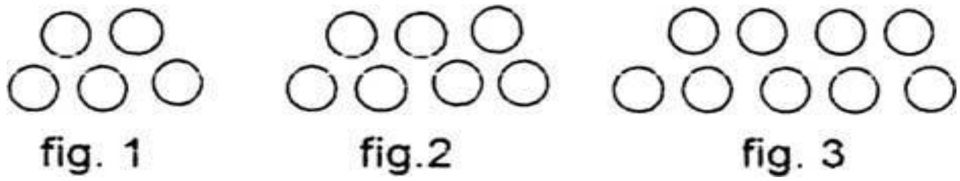
¿Cuántos círculos hay en la Figura 6? Respuesta:

2. ¿Hay alguna manera de encontrar el número de círculos en la Figura 15, sin construir la Figura? Explica
3. Mateo quiere construir la Figura 25. Explica lo que debe hacer para construirla.
4. Santiago tiene una Figura de esta secuencia. Él usó exactamente 19 círculos. ¿A qué número de figura corresponde? Explica la manera como procediste para encontrar tu respuesta.
5. ¿Existe alguna Figura que tenga un número par de círculos? Explica
6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad cómo procedes para calcular rápidamente el número de círculos en la Figura 500.

Figura 15. Tarea 1: Secuencia figural apoyada por representación tabular (1)

NOMBRE: ____

Edad: _________________ ***Curso:*** ________________ ***Fecha:*** _______________



Siguiendo la secuencia anterior,

1. Dibuja las figuras 5 y 6
2. Calcula el número de círculos de la figura 9, sin construirla. Explica cómo lo haces.
3. Calcula el número de círculos de la figura 100 y explica cómo lo haces.
4. Santiago tiene una Figura de esta secuencia. Él usó exactamente 81círculos. ¿A qué número de figura corresponde? Explica la manera como procediste para encontrar tu respuesta.
5. ¿Existe alguna figura que tenga 200 círculos? Explica a un compañero tu respuesta
6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para calcular rápidamente el número de círculos de la Figura 1000.

Figura 16. Tarea 2: Secuencia figural apoyada por representación tabular (2)

NOMBRE: ____

Edad: _________________ ***Curso:*** ________________ ***Fecha:*** _______________

Ahora tienes la siguiente secuencia de números:

2	***5***	***8***
Término 1	Término 2	Término 3

Siguiendo la secuencia anterior,

1. ¿Cuáles son los números correspondientes a los Términos 4, 5 y 6? Explica
2. ¿Cuál es el número que corresponde al Término 15? Explica cómo lo haces.
3. ¿Cuál es el número correspondiente al Término 100? Explica cómo procediste para encontrar la respuesta
4. ¿A qué Término corresponde el número 803? Explícale a un compañero(a) con todos los detalles la manera como procediste para encontrar tu respuesta.
5. Un niño piensa en el número 903. ¿Pertenece este número a la secuencia dada? Explica por qué sí o por qué no.
6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para saber o calcular rápidamente el número que corresponde al Término 8275.

Figura 17. Tarea 3: Secuencia numérica apoyada por representación tabular

Si bien reconocemos que a partir de estas preguntas o solicitudes había posibilidades de expresión por parte de los niños y las niñas, también entendimos que había limitaciones y, en consecuencia, los medios semióticos de objetivación que lograron movilizar estaban tal vez instanciando y estratificando un tipo de pensamiento en particular como el Factual.

Es necesario y pertinente señalar dos aspectos. Por un lado, fue necesario diseñar e implementar una segunda tarea (Tarea 2) sobre secuencia figural con apoyo tabular. Tal decisión fue motivada teóricamente, en tanto desde la teoría cultural de la objetivación reconocemos la necesidad de que nuestros estudiantes tuvieran una mayor familiaridad con este tipo de secuencias, lograran entrar en contacto cultural con este tipo de configuraciones y terminología, al mismo tiempo que ganaran cierta confianza en el trabajo entre ellos y con la profesora en una especie de labor conjunta (Radford, 2013a), así como poder instaurar un ambiente propicio para el trabajo tanto individual como en pequeños grupos, tal y como fue reconocido en nuestra fase de pilotaje.

Solicitudes o preguntas tales como "*Mateo quiere construir la Figura 25. Explica lo que debe hacer para construirla",* (ítem 3, Tarea 1), *"Calcula el número de círculos de la figura 100 y explica cómo lo haces"* (ítem 3, Tarea 2), *"¿Cuál es el número correspondiente al Término 100? Explica cómo procediste para encontrar la respuesta"* (ítem 3, Tarea 3), pretendían indagar por las maneras en que los estudiantes podían comunicar un mensaje a otro compañero y, en la discusión entre pequeños grupos y con la profesora, evidenciar la movilización de recursos semióticos. El esfuerzo conjunto con los compañeros y la profesora deseaba conducirlos a una instanciación de la forma codificada de pensamiento (Radford, 2013a).

Nos proponíamos lograr que el saber cultural "en sí mismo" se transformara en saber "para sí mismo", esto es, transformado en un saber para quien intentaba comunicar su mensaje. Dicha transformación la rastreábamos a partir de una nueva forma de percibir, hablar y manipular conceptualmente las secuencias. Posteriormente estas acciones se transformaban en una forma segura, rápida y efectiva de calcular algo, por ejemplo cuando solicitamos *"Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad cómo procedes para calcular rápidamente el número de círculos en la Figura 500"* (ítem 6, Tarea 1), *"Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para calcular rápidamente el número de círculos de la Figura 1000"* (ítem 6, Tarea 2), *"Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y* *con todos los detalles cómo procedes para saber o calcular rápidamente el número que corresponde al Término 8275"* (ítem 6, Tarea 3).

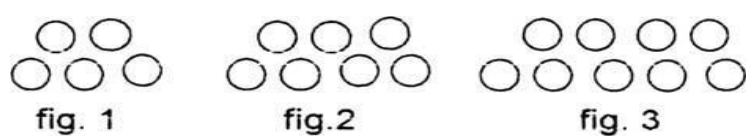
Estamos de acuerdo con Radford (2013a, p. 38) cuando señala que "la objetivación, o la transformación del saber "en sí mismo" en un objeto de conciencia, no es el resultado de actos solitarios ni es el resultado de la contemplación". La transformación es el resultado de una actividad material sensorial o sensitiva conjunta, en otras palabras, una actividad en donde el estudiante y la profesora u otro compañero se ponen en riesgo. Este riesgo lo interpretamos como una lucha entre profesora y estudiante o estudiantes por comunicar algo, comprender algunas características de las secuencias, intentar identificar el patrón, etc., en esa zona de desarrollo próximo vygotskiana.

Durante las sesiones desarrolladas a partir de las tres primeras tareas, deliberadamente preguntamos en algunas entrevistas focalizadas y de manera reiterada a algunos estudiantes, por *"el número de círculos o cuadrados de una figura cualquiera"* y fuimos más allá, pues también les solicitamos que nos dijeran *"el número de círculos o cuadrados correspondiente a la figura n"*. Esperábamos que, frente a la solicitud, ellos refirieran alguna figura o término en particular, pues entendíamos que este tipo de lenguaje matemático no estaba en la experiencia cultural de los estudiantes.

NOMBRE: ____

Edad: ______________ ***Curso:*** ______________ ***Fecha:*** ______________

Recuerda la secuencia de círculos:



La profesora Johanna tiene una bolsa y dentro de ella introduce varias tarjetas, cada una con un número. Cada uno de estos números corresponde a una de las figuras de la secuencia anterior. Ella saca al azar una tarjeta y la introduce en un sobre, asegurándose de que ningún estudiante haya visto el número de la tarjeta. Johanna quiere que el sobre sea enviado a la profesora Estella con un mensaje que será introducido en el sobre junto con la tarjeta que contiene el número. Este mensaje debe explicar a la profesora cómo calcular rápidamente el número de círculos que corresponde al número de la tarjeta.

Figura 18. Tarea 4: Problema del Mensaje

Desde nuestra perspectiva vygotskiana, el pensamiento puede desarrollarse. En ese sentido, propusimos el Problema del Mensaje (Tarea 4). A esta altura del trabajo queríamos, fundamentalmente, que la indeterminancia fuera nombrada y tratada analíticamente. Este problema difiere del propuesto por Radford en algunos trabajos (véase, por ejemplo, Radford, 2012a), ya que para los niños era importante escribir para un destinatario real, en este caso la profesora Estella, quien era una persona altamente estimada por ellos. En el Problema del Mensaje propuesto por Radford, el destinatario era un alumno de otro colegio que cursaba el mismo grado que los estudiantes a quien se les solicitaba elaborar el mensaje. Este hecho de que los estudiantes escribieran para alguien muy estimado los podría obligar a elaborar el mensaje con todos los detalles.

Considerábamos necesario hacer emerger los tres elementos o vectores que caracterizan el pensamiento algebraico (Radford, 2010b), por lo que podemos afirmar que este Problema del Mensaje se constituía en un recurso didáctico importante que pretendía movilizar en los estudiantes otros medios semióticos de objetivación para que ellos lograran finalmente nombrar explícitamente lo indeterminado y operar con él. Desde un punto de vista filosófico, queríamos que los estudiantes instanciaran una forma de razonamiento y de acción que ha quedado codificada culturalmente en la historia como lo es el pensamiento algebraico (Radford, 2013a).

Las Tareas 5 y 6 fueron propuestas para indagar por los medios semióticos de objetivación que lograban movilizar cuando abordaban secuencias numéricas y figurales en ausencia del recurso tabular, lo que en esta investigación hemos llamado secuencias puramente numéricas y secuencias puramente figurales, respectivamente. Manteníamos la hipótesis según la cual al parecer las secuencias figurales con apoyo tabular ofrecen índices geométrico-espaciales que movilizan formas perceptivas y gestuales en los alumnos, formas que parecen no ser movilizadas, o por lo menos no con la misma intensidad, en el caso de las secuencias numéricas con apoyo tabular y las puramente numéricas.

NOMBRE: ____

Edad: _________________ ***Curso:*** ________________ ***Fecha:*** _______________

Ahora tienes la siguiente secuencia de números:

5 7 9 11

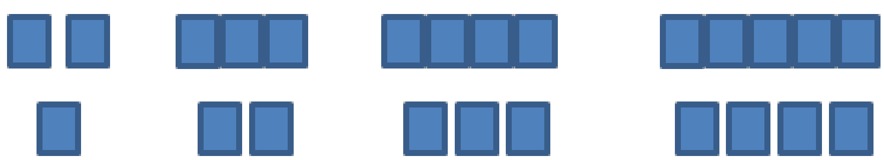
1. ¿Cuál consideras tú es el primer término de la secuencia anterior?, ¿por qué?
2. ¿Cuál es el término siguiente?
3. La profesora Johanna tiene una bolsa y dentro de ella introduce varias tarjetas, cada una marcada con un número. Cada uno de estos números corresponde a uno de los términos de la secuencia anterior. Ella saca al azar una tarjeta y la introduce en un sobre, asegurándose que ningún estudiante haya visto el número de la tarjeta. La profesora Johanna quiere que se escriba un mensaje a la profesora Estella, que será introducido en el sobre junto con la tarjeta, el cual explique cómo calcular rápidamente el número que corresponda a ese término.
4. Ahora, la profesora Johanna hace lo mismo que en el punto anterior, pero esta vez cada uno de los números corresponde a uno de los números de la secuencia. Escribe un mensaje a la profesora Estella en donde le expliques cómo calcular rápidamente el término que corresponde al número marcado en la tarjeta.

Figura 19. Tarea 5: Secuencia puramente numérica

NOMBRE: ____

Edad: _________________ ***Curso:*** ________________ ***Fecha:*** _______________

Observa la siguiente secuencia



1. ¿Cuál consideras tú es la primera Figura?, ¿por qué?, ¿cuál es la segunda?, ¿cuál es la tercera? y ¿cuál es la cuarta?
2. Calcula el número de rectángulos que tiene la Figura 8. Explica la manera como procediste para encontrar la respuesta.
3. La profesora Estella quiere construir la Figura 12. Explícale a ella qué debe hacer para construirla.
4. Ahora la profesora Estella quiere construir una Figura grande. Explícale a la profe qué debe hacer para construirla.
5. La profesora Johanna tiene una bolsa y dentro de ella introduce varias tarjetas, cada una con un número. Cada uno de estos números corresponde a una de las figuras de la secuencia anterior. Ella saca al azar una tarjeta y la introduce en un sobre, asegurándose que ningún estudiante haya visto el número de la tarjeta. Johanna quiere que el sobre sea enviado a la profesora Estella con un mensaje que será introducido en el sobre junto con la tarjeta que contiene el número. Este mensaje debe explicar a la profesora Estella cómo calcular rápidamente el número de rectángulos que corresponde al número de la tarjeta.

Figura 20. Tarea 6: Secuencia puramente figural

Aún más, estábamos interesados en explorar recursos semióticos movilizados por los estudiantes al abordar secuencias puramente numéricas vs recursos semióticos movilizados al abordar secuencias numéricas con apoyo tabular, del mismo modo que explorar los recursos semióticos utilizados al enfrentar secuencias puramente figurales vs los recursos semióticos movilizados en el abordaje de secuencias figurales con apoyo tabular.

NOMBRE: ____
Edad: _________________ ***Curso:*** ________________ ***Fecha:*** _______________

En una sesión anterior, habíamos visto a la profesora Johanna que tenía una bolsa y dentro de ella introducía varias tarjetas, cada una con un número. Cada uno de estos números correspondía a una de las figuras de una secuencia dada. Ella sacaba al azar una tarjeta y la introducía en un sobre, asegurándose de que ningún estudiante hubiera visto el número de la tarjeta. La solicitud de Johanna era que el sobre fuera enviado a la profesora Estella con un mensaje que era introducido en el sobre junto con la tarjeta que contenía el número. Recuerda que este mensaje debía explicar a la profesora Estella cómo calcular rápidamente el número de círculos que correspondía al número de la tarjeta.

Un alumno escribió el siguiente mensaje:

"Profe Estella, para saber el número de círculos tú debes coger el número que está en el sobre y sumarle el mismo número y al resultado que te dio le sumas 1, y el resultado que te dio corresponde al número de círculos de esa figura".

A partir del mensaje anterior, construye los cinco primeros términos de la secuencia.

Figura 21. Tarea 7: Problema del Mensaje al revés

Finalmente, en la Tarea 7 que hemos llamado el "Problema del Mensaje al revés", solicitamos a los estudiantes construir los primeros cinco términos de una secuencia, dado el mensaje elaborado por algunos de ellos (en realidad fue un mensaje ajustado). De nuevo, de acuerdo con nuestra posición vygotskiana del método genético o evolutivo, intentábamos comprender que la teleología del significado y de las interpretaciones que los estudiantes hacían respecto de las preguntas y solicitudes, no sólo reposa en las tareas diseñadas sino también en el evento o actividad tal cual como se desarrollaba y en la organización didáctica de esa actividad.

Por supuesto ya en esta tarea aparece, en el contenido del mensaje dado, lo indeterminado explícitamente nombrado y tratado analíticamente. Para los propósitos de nuestra investigación, era importante explorar la manera como los estudiantes usaban lo indeterminado analíticamente para producir una secuencia, no importaba si era figural o numérica.

3.4 Población, naturaleza de las sesiones de trabajo y proceso de recolección de la información

El trabajo de campo lo realizamos, inicialmente, con un grupo de 15 estudiantes de 4° y 5° de primaria (9-10 años) de un colegio público de la ciudad de Bogotá (Colombia), durante 13 sesiones de 2 horas cada una aproximadamente, entre los meses de abril y septiembre de 2012. Algunas de estas sesiones fueron combinadas con entrevistas focalizadas que, en general, permitieron conocer más de cerca la intimidad de las maneras de proceder de los niños y las niñas en las tareas y las justificaciones que esgrimían. El grupo finalmente se redujo a 13, pues 2 estudiantes desistieron de participar al cabo de la tercera sesión de trabajo.

Las sesiones fueron dirigidas por una profesora del colegio (institución en donde tomamos los datos de investigación), mientras que el autor del presente estudio estuvo en la grabación en video de las sesiones de trabajo con los estudiantes.[28] Dichas sesiones estuvieron precedidas por encuentros permanentes con la profesora en los cuales analizábamos y discutíamos no sólo la estructura y pertinencia de las tareas sino también la posible actuación de ella en las sesiones de trabajo con los estudiantes.

Las sesiones de trabajo se llevaron a cabo los días miércoles y viernes, inicialmente, y luego sólo los miércoles. Los alumnos asistían a la biblioteca del colegio en las horas de la mañana y una vez terminaban las sesiones regresaban a sus clases regulares. En términos generales, los estudiantes, en sus propios términos, esperaban "aprender cosas nuevas de matemáticas", aspecto que se vio reflejado, al menos, en la percepción por parte de ellos de unas clases diferentes de las recibidas en el colegio (en sus clases regulares). Es necesario reconocer la disposición positiva de los estudiantes durante todas las sesiones de trabajo, aun cuando se presentó en las tres primeras sesiones cierta timidez por parte de algunos alumnos cuando intentaban participar en el trabajo de socialización al interior de los

[28] La profesora es magíster en docencia de la matemática y su tesis de maestría asumió como marco teórico la teoría cultural de la objetivación. De esta manera ella estuvo familiarizada con algunas herramientas analíticas de la teoría, lo cual le posibilitaba capitalizar los momentos cuando intervenía en los pequeños grupos, es decir, contaba con elementos teóricos para plantear sus preguntas e indagar por los medios semióticos de objetivación que movilizaba los estudiantes cuando abordaban las tareas.

pequeños grupos que se conformaban, los cuales no siempre fueron integrados con los mismos estudiantes.

Teniendo como sustento los desarrollos de la teoría cultural de la objetivación, nos proponíamos desarrollar las sesiones de trabajo con los estudiantes siguiendo la estructura del Particular de Hegel. Desde luego con el diseño de las tareas expuesto en la sección anterior seguíamos la relación $\boldsymbol{\Phi}$.

La relación $\boldsymbol{\Theta}$, por su parte, refiere a la actividad planeada y la que propiamente se desarrolla (evento). En este sentido, las sesiones, en general, constaban de un trabajo individual, luego una discusión entre pequeños grupos y finalmente, en la medida de lo posible, una discusión general con el grupo completo. El primer estado de $\boldsymbol{\Theta}$ constaba de una presentación de la actividad por parte de la profesora (Radford, 2013a); posteriormente los estudiantes eran invitados a trabajar en los pequeños grupos conformados de dos o tres por grupo.

Posteriormente, la profesora visitaba los grupos en la idea de solicitar a algunos integrantes exponer las propuestas de solución de las tareas y comunicar a otro compañero o compañera esta solución, además de cuestionar y hacer las retroalimentaciones necesarias. Nos interesaba el intercambio de ideas (Radford & Demers, 2004) y propuestas de solución y la discusión entre los integrantes de los grupos. Coincidimos con Bajtín (1929/1992) cuando señala que el sujeto social se forma discursivamente, en el proceso comunicativo de yo con el otro, es decir que el discurso propio se construye en relación con el discurso ajeno, en el proceso de una íntima y constante interacción; el sujeto se desarrolla en tanto las actuaciones del otro, del discurso del otro.

Estamos convencidos de que la objetivación del saber presupone el encuentro con un objeto cuya apariencia en nuestra conciencia sólo es posible a través de contrastes. Nuestro conocimiento y comprensión de un objeto de saber sólo es posible mediante el encuentro con la comprensión que otros individuos tienen de este objeto de saber (Bajtín, 1979/2009; Vygotski, 1931/2000), pues consideramos que en la vía hacia el saber, la relación sujeto-objeto está mediatizada no sólo por los artefactos, sino por la presencia del otro en una especie de relación de alteridad bajtiniana.

Este tipo de relación bajtiniana nos parece importante en tanto queríamos reconocer la idea teórica de ser a través de los otros (Bajtín, 1979/2009), y en tal sentido propiciar los espacios para que los estudiantes interactuaran entre ellos, con la profesora y con el investigador. La idea de alteridad lleva a ver la interacción social no como un mero juego de negociación de significados, sino como un elemento constitutivo del saber cultural del que se apropia el alumno.

Justamente el proceso de subjetivación (Rancière, 1999; Roth & Radford, 2011) lo entendemos bajo la idea de "desarrollo de un sujeto-en-actividad" (Roth & Radford, 2011, p. 135). En un cierto momento, la profesora podía invitar la clase a una discusión general donde los grupos podían presentar sus ideas y otros grupos podían desafiarlos o proponer una generalización.

La recolección de la información estuvo precedida por el diseño previo de tareas acerca de generalización de patrones. Este acopio se realizó en cuatro fases, y siguió las orientaciones de Miranda, Radford & Guzmán (2007). Éstas fueron:

Fase 1: Grabación en video de todas las actividades de clase. Esta grabación se realizó con una cámara que capturó, en algunos momentos, la sesión de clase completa, y en otros, discusiones focalizadas de algunos grupos en el aula de clase en el momento de resolver las tareas.

Fase 2: Obtención de las hojas de trabajo de cada estudiante. Si la actividad no terminaba en una sesión, las hojas de trabajo se recogían y se entregaban nuevamente en la siguiente sesión.

Fase 3: Transcripción de todos los videos correspondientes a las sesiones de trabajo.

Fase 4: Análisis de videos y de las hojas de trabajo en los cuales había evidencia de los procesos de resolución de las tareas sobre generalización de patrones.

A partir de estas cuatro fases y de sus respectivos análisis, y especialmente con base en las tareas propuestas sobre generalización de patrones en los cuatro contextos: secuencias figurales apoyadas por representación tabular, secuencias numéricas apoyadas por representación tabular, secuencias puramente numéricas y secuencias puramente figurales, en las entrevistas focalizadas (grabadas también en video), profundizamos en el pensamiento matemático de los estudiantes, el tipo de respuestas que daban, sus justificaciones, a partir de algunas entrevistas focalizadas.

Queríamos inquirir aspectos que iban emergiendo en el proceso, tales como respuestas no muy claras que los estudiantes daban, así como las interacciones en pequeños grupos en los cuales solicitábamos que algún estudiante explicara a otro su proceso de solución. También nos interesaba concentrar la entrevista en ciertos aspectos temáticos claves, como por ejemplo la manera como identificaban la comunalidad o característica común, el tipo de gestos que movilizaban y detectar, quizás, la movilización de varios recursos semióticos sincronizadamente, es decir, identificar la presencia de nodos semióticos.

En fin, no estábamos interesados en valorar respuestas correctas o incorrectas, sino en estudiar los procesos que desarrollaban los estudiantes (Goldin, 2000), en los cuales se podía identificar cierta evolución de medios semióticos de objetivación y cómo unos sustituían a los anteriores, al mismo tiempo que los estudiantes lograban concentrar los significados. Este proceso de objetivación llamado contracción semiótica (Radford, 2008b) nos informaba acerca de la toma de conciencia progresiva por parte de los estudiantes en una especie de reorganización psíquica de sus conciencias.

Las tareas planteadas estuvieron sujetas a un “control experimental” (Goldin, 2000), en las cuales, fue necesario considerar variables como, por ejemplo, el contenido matemático y la estructura, la complejidad y la estructura lingüística y semántica. Estamos de acuerdo con Goldin (1998, p. 53) cuando precisa que “un objetivo importante es obtener e identificar los procesos que los niños utilicen de forma espontánea”. En otras palabras no nos interesaba indagar sólo el comportamiento sino las razones que motivaban a los niños y niñas a actuar de cierta manera en algún momento. Aún más, éramos conscientes de que estábamos actuando en un contexto social, psicológico y cultural. Goldin (1998, p. 58) argumenta que "el contexto influencia y permite contrastes en las interacciones que ocurren durante la entrevista y pone limitaciones en las posibles inferencias".

Por ejemplo, la redacción del Problema del Mensaje (Tarea 4) para ser presentado a los estudiantes, se convirtió en un ejercicio difícil, pues nos interesaba que tal estructura lingüística no introdujera elementos de dispersión y/o confusión, y que más bien los estudiantes al leerlo concentraran su atención en la exigencia de esta tarea y en las condiciones que establecía, de tal suerte que en el ejercicio de escritura del mensaje por parte de ellos a una profesora (la profesora Estella), lograran explicar con todos los detalles la manera de calcular el número de círculos.

Los encuentros permanentes con la profesora, quien dirigía las sesiones, tuvieron como insumos estos aspectos mencionados y fueron capitalizados en las entrevistas focalizadas. La entrevista, como lo señala Goldin (2000, p. 520):

> Hace posible poner el foco de interés de la investigación más directamente en los procesos del sujeto al enfrentar la tarea matemática, más que sólo en los patrones de las respuestas correctas o incorrectas que ellos producen, por lo tanto hay la posibilidad de ahondar en una variedad de tópicos importantes con más profundidad de la que es posible por otros medios experimentales.

Estas entrevistas basadas en tareas contribuyeron a corroborar hipótesis, por ejemplo, inquietudes asociadas con la manera como los estudiantes identificaban el patrón, formas como iban reduciendo los recursos semióticos que movilizaban, significados que elaboraban, instrumentos semióticos que usaban, entre otras cuestiones. Este tipo de entrevista aportó su grano de arena en la identificación de elementos, indicios o descriptores relacionados con formas de pensamiento algebraico temprano en los estudiantes.

Nuestro interés estuvo centrado en el desarrollo conceptual (desarrollo de pensamiento algebraico), por ello el diseño de las tareas intentaba producir un desarrollo en los estudiantes. Este desarrollo lo asumimos como un proceso social de aproximación de significados subjetivos o personales a los significados histórico-culturales plasmados en la semiótica algebraica (Miranda, Radford & Guzmán, 2007), esto es, un proceso de objetivación.

3. 5 Constitución de los datos y descripción del análisis

En relación con la constitución de nuestros datos de investigación seguimos un abordaje metodológico de acuerdo con los planteamientos de Glaser (1978, 2002), Glaser & Strauss (1967) y Soneira (2006). El primer conjunto de datos está constituido por las transcripciones de todos los videos correspondientes a las 13 sesiones (14 transcripciones), las hojas de trabajo de cada uno de los estudiantes, algunas entrevistas focalizadas (que realizamos al interior de algunas sesiones de trabajo) y notas de campo del investigador. En relación con el número de hojas de trabajo, en este primer conjunto de datos, establecimos: 15 para cada una de las tres primeras tareas (para un subtotal de 45), 12 hojas de trabajo en relación con la Tarea 4, 13 hojas de trabajo tanto para la Tarea 5 como para la 6 (es decir, 26 hojas de trabajo) y 11 desarrolladas acerca de la Tarea 7, para un total de 94 hojas de trabajo durante las 13 sesiones llevadas a cabo.

El proceso de reducción y análisis de datos estuvo gobernado permanentemente por un criterio fundamental, el del *foco teórico*. Según este criterio, tuvimos siempre en consideración no sólo nuestra pregunta y objetivo de investigación, sino también los principios y conceptos de la teoría cultural de la objetivación, los cuales nos permitían discernir y avanzar en el desarrollo de la habilidad de dar sentido a los datos. En este proceso de *sensibilidad teórica* (Glaser, 1978) fue fundamental la capacidad de comprender y de separar lo pertinente de lo que no era.

Considerando permanentemente nuestro foco teórico, procedimos a hacer una segmentación temática. De esta manera, marcamos con color verde, en los diálogos (transcripciones de los videos), sentencias, frases, expresiones, en fin, indicios que nos mostraban elementos o aspectos asociados con el pensamiento algebraico Factual. Marcamos con color café todo aquello que nos arrojaba información acerca del pensamiento algebraico Contextual y con color morado información que nos evidenciaba una indeterminancia analítica o algebraica, lo cual lleva consigo una designación simbólica o expresión semiótica.

Esta especie de codificación inicial o abierta (Glaser & Strauss, 1967; Soneira, 2006) fue apoyada con las producciones de los alumnos en las hojas de trabajo. En un proceso de *saturación teórica* (Glaser & Strauss, 1967; Soneira, 2006), revisamos exhaustivamente las producciones de los estudiantes, desarrolladas en estas hojas de trabajo correspondientes a cada tarea propuesta. Coincidimos con Soneira (2006, p. 156) cuando sostiene que:

> El investigador selecciona casos a estudiar según su potencial para ayudar a refinar o expandir los conceptos o teorías ya desarrollados. La "saturación teórica" significa que agregar nuevos casos no representará hallar información adicional por medio de la cual el investigador pueda desarrollar nuevas propiedades de las categorías.

Sin embargo, es necesario aclarar que a nuestro juicio la saturación teórica no tiene una interpretación objetiva, ni es calculable, ni medible. Consideramos que llega un momento en el cual hay que tomarse una responsabilidad personal como investigador y decidir que ya es suficiente. Soneira (2006, p. 157) precisa que "codificar supone siempre un *corte o fractura* de los datos"[29], lo cual sugiere un esfuerzo en leer y releer los datos para descubrir relaciones. El proceso nos llevó a seleccionar, como señalamos anteriormente, las hojas de trabajo, correspondientes a cada una de las tareas, que nos arrojaban información sobre las formas de pensamiento algebraico Factual y/o Contextual, vinculadas a los tres vectores o elementos que caracterizan el pensamiento algebraico. Es decir, nos interesaba información acerca de la indeterminancia, la analiticidad y la expresión semiótica que nos complementara o substanciara la información obtenida de nuestra codificación abierta en

[29] Cursivas en el original.

relación con lo Factual y/o Contextual llevada a cabo sobre las transcripciones de los videos.

En relación con el número de hojas de trabajo seleccionadas del total en cada una de las tareas establecimos lo siguiente: para la Tarea 1 seleccionamos 9 de 15 hojas de trabajo; 8 de 15 hojas de trabajo acerca de la Tarea 2; 6 de 15 hojas de trabajo con respecto a la Tarea 3; 6 de 12 en relación con la Tarea 4; en relación con la Tarea 5 seleccionamos 6 hojas de trabajo de 13; 8 hojas de trabajo de un total de 13 para la Tarea 6 y 3 hojas de trabajo de 11 con respecto a la Tarea 7. En total obtuvimos 46 hojas de trabajo seleccionadas que nos permitieron complementar la información proveniente de las segmentaciones temáticas. Algunas producciones correspondientes a preguntas o solicitudes que hacíamos en las tareas propuestas (hojas de trabajo) ya eran redundantes o no fueron pertinentes o no nos eran de utilidad.

En conclusión, los datos finales de la investigación (aun cuando vale la pena insistir que, a partir de los planteamientos de Glaser (1978, 2002), Glaser & Strauss (1967) y Soneira (2006), la información se convierte en dato cuando damos sentido a ésta a través de los principios y conceptos de la teoría cultural de la objetivación) tienen dos dimensiones. Por un lado tenemos los extractos de diálogos de las transcripciones de los videos que segmentamos temáticamente y que permitieron identificar instanciaciones del pensamiento algebraico Factual/Contextual con sus respectivos vectores (sentido de la indeterminancia, analiticidad y expresión semiótica). Establecimos 100 extractos de diálogos (verde para instanciaciones del pensamiento algebraico Factual, café para indicios o instanciaciones del pensamiento algebraico Contextual y morado para instanciaciones de la indeterminancia algebraica o analítica). La otra dimensión del dato tiene que ver con las producciones en las hojas de trabajo seleccionadas (46), descritas anteriormente y que permitieron saturar cada una de las categorías. Estos datos fueron objeto de profundización analítica con miras a responder nuestra pregunta de investigación.

A manera de ejemplo presentamos, en la Figura 22, un extracto de diálogo de la transcripción del video que ilustra parte del proceso de codificación abierta. De este diálogo correspondiente a la Sesión número 4 del 2 de mayo de 2012, identificamos algunos elementos asociados con el pensamiento algebraico Factual. Por su parte, en la Figura 23, también a manera de ilustración, presentamos un extracto de diálogo de la transcripción del video correspondiente a la Sesión número 11 del 18 de mayo de 2012. En este ejemplo podemos apreciar segmentos en color café y en color morado de frases que nos estaban dando indicios, respectivamente, de instanciaciones sobre el pensamiento algebraico Contextual y de un sentido de la indeterminancia tratada analíticamente, asociada a este estrato de pensamiento.

Profesor Johanna: Pero mira si tú pones 34 círculos abajo y 33 arriba ¿cuántos círculos tiene Esneider?
Estudiantes en coro: 67!
Profesora Johanna: Listo, entonces es lo que yo te quiero decir pero es que mira que estamos averiguando la figura que tiene 81 círculos.
Esneider: Por eso, dividiendo el (….) 67.
Profesora: ¿Qué es lo que divides?, ¿el 67?, ¿lo divides?. Y ¿cuánto te da?
Esneider: (…) Umm no.
Profesora Johanna: ¿Quién le explica a Esneider?, Luis ya explicó. Entonces ahora quiero que explique otro tú, ¿sí?, explícale a Esneider, mira la solución que tienen ellos [*dirigiéndose a Esneider*].
Estudiante: Usted tiene que restarle al 81 tres el resultado lo tienes que dividir por 2.
Profesora Johanna: Pero explícale a Esneider ¿por qué tienes que restarle 3?
Estudiante: **Porque la secuencia lo dice, porque por ejemplo aquí, 2 y le sumamos 2, esta es la figura 2 entonces se colocan dos círculos más, más dos, me darían 4 y al cuatro le resto 1 y le pongo 3 arriba.**

Figura 22. Parte de un ejemplo de codificación abierta que evidencia elementos de pensamiento algebraico Factual

Profesor Rodolfo: ¿Y por ejemplo, como sería la figura 5?
Laura Sofía: Sería 5 abajo [*hace una línea imaginaria con el lápiz debajo de la hilera inferior de la cuarta figura*] y 6 arriba [*hace lo mismo, solo que esta vez en la hilera superior de la misma figura*].
Profesor Rodolfo: [*Señala la hilera inferior de la figura 4*] Pero tú dices aquí 4, para ti esta es la figura 4 ¿no? [*Señalando la última figura, y ella asiente*], 4 arriba [*señala la hilera de arriba*], 4 abajo [*señala la hilera de abajo*] y ¿dijiste 1? [*Señalando el ultimo rectángulo de la hilera de arriba*]. ¿Entonces con la figura 5 procedes de la misma manera? ¿o cómo es?
Laura Sofía**: 5 abajo y 5 arriba [***mientras señala las hileras***] más 1.**
Profesor Rodolfo: ¿Y la figura 6?
Laura Sofía: **6 abajo y 6 arriba, más 1.**
Profesor Rodolfo: ¿Cómo será, por ejemplo, Jenny, en la figura 15?
Jenny: **15 abajo y 15 arriba** [*sube la mano ligeramente*] **y le sumamos 1, serían 15 abajo y 16 arriba.**
Profesor Rodolfo: Ahora, el quinto punto ¿cómo lo resolviste tú Laura Sofía? Ábrelo para que lo vean.
Laura Sofía: [*Laura lee de su guía*] Profe Estella, **coges el número que está en la tarjeta y lo sumas por el mismo más 1.**
Jenny: Profe, yo tenía una pregunta. Era que si era de esta secuencia [*señala la secuencia de la guía de trabajo*] o de la anterior que trabajamos.

Figura 23. Parte de un ejemplo de codificación abierta que evidencia elementos de pensamiento algebraico Contextual y un sentido algebraico de la indeterminancia

Por ejemplo, en el caso de la expresión marcada con color morado mostrada en la Figura 23 *"Profe Estella, coges el número que está en la tarjeta y lo sumas por el mismo más 1"*, nos interesaba complementarla con la producción en la hoja de trabajo de la estudiante y substanciar la categoría con el ánimo de saturarla, es decir, al encontrar información similar estábamos ante la presencia de un dato redundante. Este proceso de identificar más propiedades de la categoría (pensamiento algebraico Factual y/o Contextual con sus tres vectores o elementos) a través de producciones de los estudiantes, desde luego nos implicaba reunir nueva información, después de la codificación abierta, analizada a la luz de los conceptos de la teoría de la objetivación.

Aún más, en el curso del trabajo con las tareas, la saturación teórica nos daba luces para no seguir reportando datos que fueran redundantes. Por ejemplo, había datos que nos informaban sobre la indeterminancia y la analiticidad en tareas como la 5 (Secuencia puramente numérica) y la 6 (Secuencia puramente figural), que decidimos no incluirlos pues en las anteriores tareas ya habíamos puesto suficiente evidencia de la presencia de estos vectores. Nos concentramos, pues, en estas tareas para indagar por los medios semióticos de objetivación que movilizaban los estudiantes, qué objetivaban y la manera como lo hacían cuando abordaban secuencias en ausencia del recurso tabular.

Compartimos la máxima de Glaser quien afirma que "los datos son siempre buenos hasta donde llegan, y siempre hay más datos para seguir corrigiendo las categorías con propiedades más relevantes" (Glaser, 2002, p. 1). Hacemos hincapié en que teníamos la necesidad de tomar decisiones y detener la substanciación de las categorías. En este sentido, nuestro proceso de reducción y análisis de datos, a partir de todas las transcripciones de los videos, hojas de trabajo de los estudiantes, notas de campo y entrevistas focalizadas, nos aseguró que las expresiones, frases y explicaciones de los estudiantes en los que nos basamos para el análisis, son representativos del fenómeno del que queremos dar cuenta en esta investigación, en este caso, de la emergencia de formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de 9 y 10 años, como consecuencia del diseño de tareas y de la actividad propiamente como se desarrolla.

Capítulo 4
Desarrollo de la Investigación
Análisis Multimodal

4.1 Introducción

En este capítulo presentamos el análisis realizado teniendo en cuenta la naturaleza de la investigación y la pregunta que nos formulamos en el Capítulo 1. Nos concentramos en las producciones de los estudiantes tanto en las hojas de trabajo seleccionadas como en las segmentaciones temáticas de las transcripciones de los videos. De esta manera, y teniendo en cuenta que la investigación aquí presentada se encuentra enmarcada en la perspectiva de la teoría cultural de la objetivación propuesta por Radford (2006b, 2013a), se realizó un análisis basado en una *concepción multimodal del pensamiento humano* (Radford, Demers, Guzmán & Cerulli, 2003; Radford, Edwards & Arzarello, 2009; Arzarello, 2006).

4.2 Sobre la concepción multimodal del pensamiento humano en esta investigación

Decimos, siguiendo a Radford, Edwards & Arzarello (2009), que es importante la inclusión del cuerpo en el acto de conocer, por lo que es clave en este análisis la consideración de los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes utilizan cuando trabajan con ideas matemáticas. Según Arzarello (2006), dicho análisis debe tener en cuenta la relación de los diferentes recursos semióticos movilizados durante la actividad (lenguaje escrito, lenguaje hablado, gestos, acciones, etc.).

Asumimos que el discurso de los estudiantes en el desarrollo de las sesiones es una práctica social en el sentido otorgado por Fairclough (1995, citado por Miranda, 2009). En concordancia con lo propuesto por Arzarello (2006), coincidimos con Fairclough cuando señala que el análisis debe tomar en cuenta la relación de los diferentes textos producidos en la actividad, que para el caso de nuestra investigación hemos considerado el texto escrito, el texto hablado y el texto gestual, desde luego con sus procesos de interpretación y producción, así como con su contexto social.

En otras palabras, somos conscientes de que ni lo escrito, ni lo hablado, ni lo gestuado por los estudiantes es analizado de manera aislada, por el contrario, estas formas de expresión y producción de significados fueron estudiados como el producto final de procesos de interacción social. Estos procesos se encuentran permeados por el objeto de la actividad y por la cultura a la que pertenecen los estudiantes.

Los recursos que movilizan los estudiantes "incluyen [también] comunicaciones simbólicas escritas y orales así como dibujos, la manipulación de artefactos físicos y electrónicos (calculadoras) y diversos tipos de movimiento corporal" (Radford, Edwards & Arzarello, 2009, pp. 91-92). Queremos una vez más insistir en que no estamos considerando los artefactos como meros auxiliares en el acto de conocer. El conocimiento llega a ser *conocimiento-con artefactos*, como opuesto a conocer vía estos artefactos. Como lo plantea Radford (2012b, p. 285), estos artefactos "se imbrican en la manera en que pensamos y llegamos a conocer". Por eso, como lo sugiere este mismo autor, el estatus epistémico de los artefactos significa que "como cambian los artefactos, así también lo hacen nuestros modos de conocer" (Radford, 2012b, p. 285).

Husserl (1931), Gehlen (1988), Merleau-Ponty (1945), citados en Radford, Edwards & Arzarello (2009, p. 92), a pesar de las diferencias en sus respectivas perspectivas, coinciden en un punto:

> El saber es mucho más que el resultado de mecanismos deductivos abstractos formales. Es crucial para la producción de saber la experiencia de la persona en el acto de conocer y el hecho de que esta experiencia está mediada por el propio cuerpo.

Nemirovsky & Borba (2003) lo plantean de la siguiente manera:

> […] Understanding and thinking are perceptuo-motor activities; furthermore, these activities are bodily distributed across different areas of perception and motor action based on how we have learned and used the subject itself. [As a consequence] the understanding of a mathematical concept, rather than having a definitional essence, spans diverse perceptuo-motor activities, which become more or less active depending on the context.

En síntesis, la naturaleza multimodal de la cognición humana significa que en nuestros actos de conocimiento, diferentes modalidades sensoriales, tales como lo táctil, lo perceptual, lo kinestésico, etc., *llegan a ser partes integrales de nuestros procesos cognitivos*.

4.3 Análisis multimodal de las producciones de los estudiantes

Con base en el análisis de la fase de pilotaje e influenciados posteriormente por los desarrollos teóricos logrados, planteamos las siguientes tareas: secuencia figural con apoyo tabular (Tareas 1 y 2), secuencia numérica con apoyo tabular (Tarea 3), el Problema del Mensaje (Tarea 4), secuencia puramente numérica (Tarea 5), secuencia puramente figural (Tarea 6) y el Problema del Mensaje al revés (Tarea 7). El análisis multisemiótico[30] lo organizamos en función de estas tareas, a partir de las cuales rastreamos la actividad

[30] Queremos hacer hincapié en la naturaleza multimodal del pensamiento humano. Esta multimodalidad tiene razón de ser en tanto tengamos un espectro de recursos semióticos que se movilizan sincronizadamente o no. Es decir, lo multisemiótico refiere a la diversidad de recursos semióticos que se activan o movilizan en la actividad matemática y desde luego está en estrecha conexión con el pensamiento multimodal.

matemática de los estudiantes a través de sus producciones orales, escritas y gestuales, que se constituyeron en nuestro foco de atención.

Permanentemente seguimos la estructura de la terna de Hegel *(General, Particular, Singular),* pues consideramos que las formas codificadas (el saber o General en la terminología de Hegel) se presentarían a nuestros estudiantes como mera potencialidad, y, a través de la actualización, ellas adquirían un contenido conceptual actualizado o instanciado, es decir, un conocimiento. Sin embargo, también tenemos claro que este contenido conceptual no es algo que no sea mediado. En consecuencia, para adquirir actualidad, para que sea real, para que se manifieste en el mundo concreto, el contenido conceptual sólo puede aparecer a través de la actividad (el Particular en la terminología hegeliana).

Es necesario anotar, para efectos de claridad en los diálogos (transcripciones de los videos) presentados, que las participaciones de los estudiantes fueron caracterizadas por líneas (e.g., L1, L2,…), cada una de las cuales indica la ocasión en la que un solo estudiante habló. Si un grupo de estudiantes responde en coro, escribiremos "Estudiantes en coro". El número de línea vuelve a comenzar cuando cambiamos de tarea. En cada línea se escribió, en letra tipo *cursiva* y entre corchetes ([…]), si lo dicho por el estudiante fue acompañado de algún gesto o de algún símbolo escrito. Algunas palabras aclaratorias que sirven para dar coherencia a las elocuciones de cada participante fueron también escritas en ese tipo de letra y entre esos signos parentéticos. Los puntos suspensivos (…) son utilizados para indicar breves pausas hechas por parte de los estudiantes y de la profesora durante sus participaciones. Estos diálogos están acompañados, en la medida de lo posible, de las producciones en las hojas de trabajo en donde planteamos las tareas y de imágenes que reconstruyen algunos episodios de los videos y que muestran la movilización de medios semióticos de objetivación en la actividad matemática de los estudiantes.

4.3.1 Tarea 1: Secuencia figural apoyada por representación tabular (1). Esta tarea, tal y como fue justificada en el diseño de la investigación, pretendía junto con la actividad desplegada, además de familiarizar a los estudiantes con este tipo de secuencias, instaurar una forma de trabajo en pequeños grupos para que interactuaran y comunicaran sus propuestas de solución. A partir de los requerimientos o ítems 1 y 2, queríamos indagar las maneras como podían identificar el patrón en la secuencia, cuyo término general corresponde a $2n-1$, con $n = 1,2,3, \ldots$

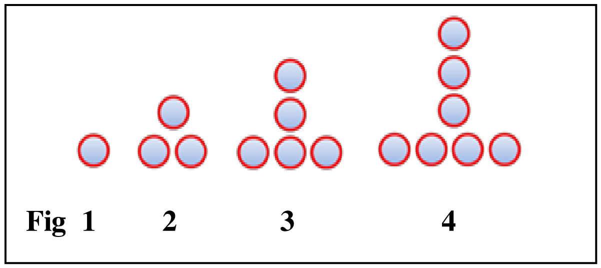


Figura 24. Secuencia figural apoyada por representación tabular (1) presentada en la Tarea 1

Desde nuestra estructura del Particular hegeliano, la profesora Johanna introdujo las secuencias. Ella dibujó en el tablero la secuencia de la Figura 24 y comenzó el siguiente diálogo:

L1. Profesora Johanna: [*Mirando al tablero*] En el tablero yo he hecho unos dibujos [*señala con la palma de la mano las figuras en el tablero y dirige su mirada a los niños*], yo quiero que ustedes miren muy bien esos dibujos y que me digan [*dirigiendo su mirada al tablero*] ¿qué características encuentran ahí? o ¿qué cosas ven ahí? Entonces muy bien, entonces vamos por allá (…) José [*señala a José*] que está levantando la mano.

L2. José: [*Mirando el tablero*] En el 1 [*levanta un dedo indicando "1"*] hay una bola [*dibuja la bola con el dedo*] y en el dos [*levanta dedos índice y corazón*] hay tres [*baja los dedos anteriores y levanta los otros tres dedos*], porque de pa' allá hay dos y de pa' arriba también [*levanta las cejas, como buscando aprobación de la profesora*].

L3. Profesora Johanna**:** Ok, entonces miren lo que dice José: que en el uno hay una bola; no las vamos a llamar bolas sino círculos, ¿vale?, que en el 1 [*señala la figura 1*] hay una bola y en el 2 [*señala la figura 2*] hay 3, ¿listo?... eh, ahora, [*señala a Santiago*] ¿me recuerdas tu nombre (…)?

L4. Santiago: Santiago.

L5. Profesora Johanna: ¡Santiago!, listo Santiago.

L6. Santiago: eh (…), es que parece, en el 2 [*señala las figuras con todos los dedos de la* *mano derecha*] hay dos bolas abajo y parece que se le montara [*levanta un poco la mano y luego la baja rápidamente, simulando estar montando un círculo sobre el otro*] la del 1 encima [*con la otra mano, señala la figura 1 y hace como si la corriera encima de la figura 2*] de la 2 (…).

L7. Profesora Johanna: Ajam, bien.

L8. Santiago: (…) y eso sigue [*hace círculos hacia la derecha con su mano diestra*] sucesivamente hasta el 4.

L9. Profesora Johanna: Eso sigue sucesivamente hasta el 4. ¿Quién más quiere decirme algo de esa figura? Allá atrás Luis, bien.

L10. Luis Felipe: Que si por ejemplo ponemos 3 círculos abajo [*con el dedo índice hace círculos hacia la izquierda*] arriba encima del medio tenemos que poner 2.

Consideramos que éste es el primer contacto cultural de los estudiantes con este tipo de situaciones que involucran secuencias figurales apoyadas por representación tabular. El trabajo de la profesora Johanna consiste, básicamente, en lograr que ellos perciban características de esta figura e identifiquen el patrón a través del cual la secuencia se forma. Más específicamente, ella quiere llevar a los alumnos a tomar conciencia de la estructura espacial de la secuencia (Radford, 2013b) como primer paso hacia la objetivación de la característica común que se desprende de una lectura que atiende a la estructura numérico-espacial de la secuencia. La labor conjunta iniciada por la profesora pone de presente su compromiso ético (Radford & Roth, 2010), a pesar de sus diferencias cognitivas y emocionales con respecto a las de los estudiantes.

En esta labor conjunta, un aspecto a resaltar consiste en el indexical temporal que usa Santiago en su respuesta (L8) *"...sigue sucesivamente…"* lo cual sugiere que ha identificado la comunalidad o característica común, es decir, la relación entre las figuras de la secuencia. Nuestro análisis sugiere que Santiago quiere predicar no sobre una figura particular sino sobre todas las figuras trascendiendo el aquí y el ahora, sin embargo no ha logrado generalizar la comunalidad a todos los términos de la secuencia. En términos de Radford (2013b), no ha logrado plantear una abducción.

Luego de esta interacción con el grupo en general, los estudiantes comenzaron a trabajar de manera individual, y posteriormente en pequeños grupos. Contaron el número de círculos en las figuras 1, 2, 3 y 4 e identificaron rápidamente que el número de círculos aumentaba en el mismo número cada vez. Sin embargo, ya que los alumnos notaron rápidamente esta relación recursiva entre las figuras consecutivas, les pedimos que nos explicaran si había alguna manera de encontrar el número de círculos en la figura 25, sin construir la figura, o como fue solicitado en el ítem (3), *"Mateo quiere construir la figura 25. Explica lo que debe hacer para construirla"*.

Intentábamos lograr que los estudiantes produjeran una explicación que mostrara indicios de alguna generalidad en relación con la manera de construir figuras grandes. Más específicamente, queríamos invitarlos a producir una generalización de la propiedad, o característica común, a los términos subsecuentes de la secuencia, esto es, a plantear una abducción (Radford, 2013b). Mostramos a continuación las producciones de Esneider, Jenny y Luis Felipe, en tanto las consideramos representativas.

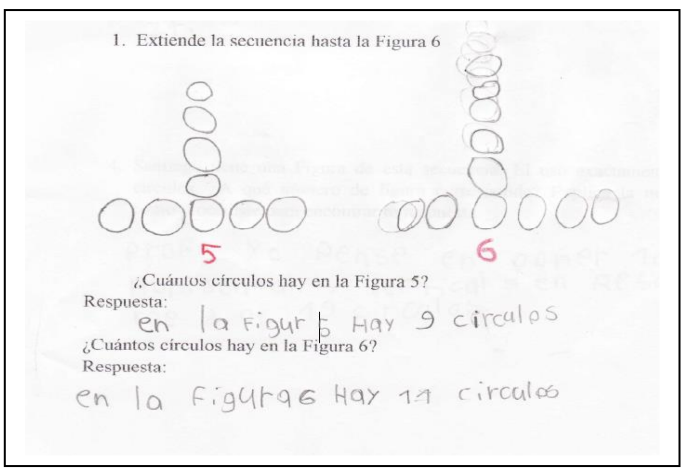


Figura 25. Producción de Esneider a la solicitud 1 de la Tarea 1

L11. Profesora: Listo, a ver Esneider cuéntanos por ejemplo, a ver ¿cuál fue tu solución?, explícame la figura 5.

L12. Esneider: En la figura cinco me dieron 9 círculos.

L13. Profesora: En el 5 [*Refiriéndose a la figura 5*] te dieron 9 círculos, en el 5 ¿cómo te dieron esos 9 círculos?, a ver ¿por qué?
L14. Esneider: Ehh, porque ehh, aquí primero, tiene que ir abajo 5 círculos [*Señalando la fila de la figura 5*] y como en el 4 [*figura 4*] habían 4 círculos abajo [*Señalando la fila de la figura 4*] ahora se le ponen 4 círculos encima [*Señalando los 4 círculos de la columna de la figura 5 contando de arriba hacia abajo*].
L15. Profesora: A ver, espérenme un segundito, a ver Esneider tú me dices que aquí hay 5 [*Señalando los círculos de la fila de la figura 5*] porque aquí había cuatro [*Señalando los círculos de la fila de la figura 4*] y que aquí hay 4 [*Señalando los círculos de la columna de la figura 5*] ¿por qué?
L16. Esneider: Ehh (…) porque encima del 5 [*Señalando la fila de la figura 5*] se colocan los números anteriores [*haciendo referencia con su mano a las figuras anteriores*].

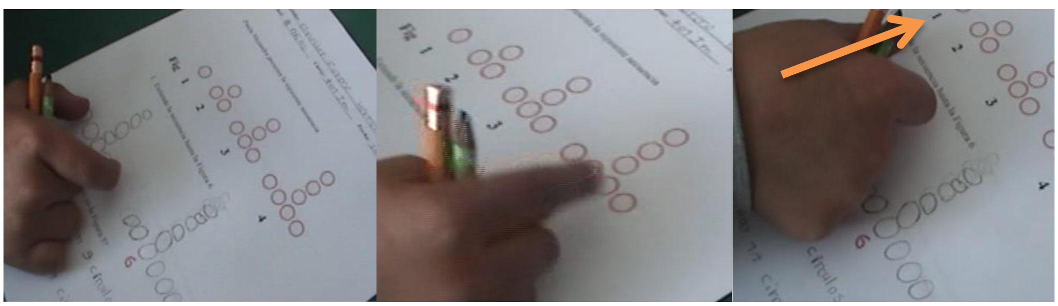
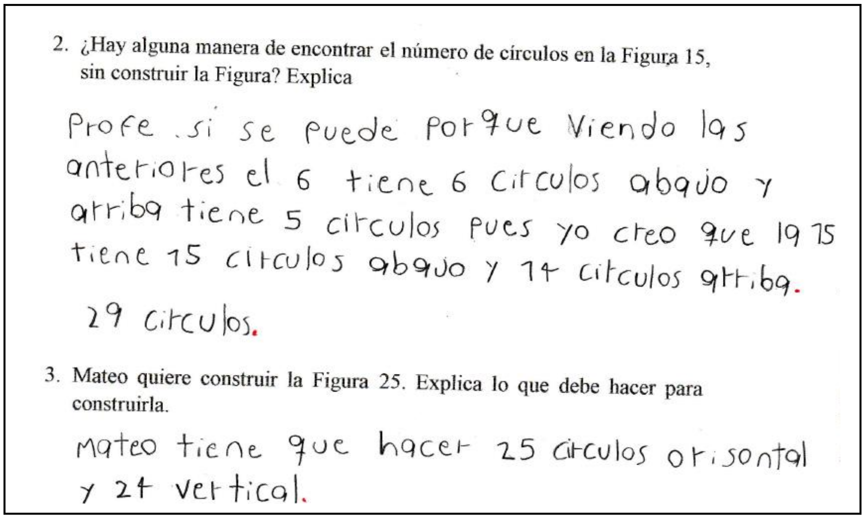


Figura 26. Coordinación multimodal de recursos semióticos en una secuencia de señalamientos de Esneider frente al ítem 1 de la Tarea 1. En la figura de la izquierda moviliza un gesto indexical señalando los círculos horizontales. La figura del centro muestra el recurso de Esneider del número de círculos horizontales de la figura anterior. Finalmente, en la figura de la derecha se muestra cómo Esneider retorna a la figura 5 y hace un deslizamiento para describir la posición y el número de círculos que deben ir en la posición vertical. Reconstrucción del video

En este caso, Esneider encuentra una manera de construir las figuras 5 y 6 en la cual su actividad perceptual o más bien su *intención perceptiva* (Radford, 2013b) juega un papel importante. Observa que, por ejemplo, la figura 4 se ha construido poniendo tres círculos verticales como aparecen horizontalmente en la figura anterior (figura 3). No tiene dificultades con la construcción de los círculos horizontales, pues ha reconocido una función del número de la figura en relación con el número de círculos horizontales. En su declaración (L14) "*ehh, porque ehh, aquí primero, tiene que ir abajo 5 círculos",* el sentido de obligatoriedad en la sentencia *"tiene que ir primero",* pone en evidencia la movilización de intención perceptiva o actividad perceptual como un recurso semiótico al reconocer la manera como se ha configurado la secuencia, al menos en relación con los círculos en posición horizontal.

Esneider acompaña sus señalamientos (Figura 26) con sentencias (L14, L16) y con su actividad perceptual. Esta acción lingüística-perceptiva-gestual se convierte en un nodo semiótico (Radford, 2009), es decir, un segmento de la actividad semiótica en la que signos que pertenecen a diferentes sistemas semióticos se complementan para lograr una toma de conciencia de la manera en que la tarea puede ser atacada desde un punto de vista algebraico (Radford, 2013b).

Desde nuestra perspectiva teórica de la objetivación, reconocemos que el conocimiento y comprensión de un objeto de saber por parte de los estudiantes es posible mediante el encuentro con la comprensión que otros individuos tienen de este objeto (Bajtín, 1979/2009; Vygotski, 1931/2000). La presencia de los otros compañeros y de la profesora Johanna no es periférica. Muy al contrario, en la vía hacia el saber, la relación sujeto-objeto está mediatizada no sólo por los artefactos, sino por la presencia del otro en una especie de relación de alteridad bajtiniana (Bajtín, 1979/2009). Esta idea de ser a través de los otros nos conminó a propiciar los espacios para que los estudiantes lograran interactuar. Por ejemplo, la producción de Jenny y luego la de Luis Felipe siguen de manera similar el trabajo efectuado por Esneider, o tal vez, para ser más precisos, consideran los acuerdos generados en la discusión de clase. En relación con los ítems 2 y 3, Jenny deja ver en su producción que se ha apoyado en las tres figuras anteriores y la 4 y la 5 construidas por ella.


2. ¿Hay alguna manera de encontrar el número de círculos en la Figura 15, sin construir la Figura? Explica

Profe si se puede porque viendo las anteriores el 6 tiene 6 circulos abajo y arriba tiene 5 circulos pues yo creo que la 15 tiene 15 circulos abajo y 14 circulos arriba.

29 circulos.

3. Mateo quiere construir la Figura 25. Explica lo que debe hacer para construirla.

mateo tiene que hacer 25 circulos orisontal y 24 vertical.

Figura 27. Producción de Jenny sobre los ítems 2 y 3 de la Tarea 1

La evidencia mostrada en la Figura 27 sugiere que Jenny ha objetivado una regularidad y ha concebido las figuras como divididas en dos líneas, la “de arriba” y la “de abajo” (realmente la fila vertical y la horizontal). Su intención fenomenológica (Radford, 2013b) le permite atender a estas determinaciones sensibles e incluso notar diferencias y similitudes. Las diferencias estarían dadas por los números de círculos en las dos líneas, mientras que las similitudes por las maneras como se conforman las figuras. Ella dice *“...pues yo creo que la 15 tiene 15 círculos abajo y 14 círculos arriba…”*, como parte de la respuesta al ítem 2. En este caso, “el trabajo algebraico sobre el terreno fenomenológico va a reposar sobre la articulación de dos estructuras diferentes: una de tipo numérica y otra de tipo espacial” (Radford, 2013b, p. 8). Jenny establece una relación entre el número de la figura y el número de círculos en la parte horizontal, por un lado, y, por otro, una relación entre el número de círculos horizontales y el número de círculos verticales. Para esta estudiante, el número de círculos verticales equivale al número de círculos horizontales menos uno. El trabajo llevado a cabo en el terreno fenomenológico, por ejemplo a través de la manera espacial de percibir la secuencia, le permite a Jenny responder al ítem 3 rápidamente.

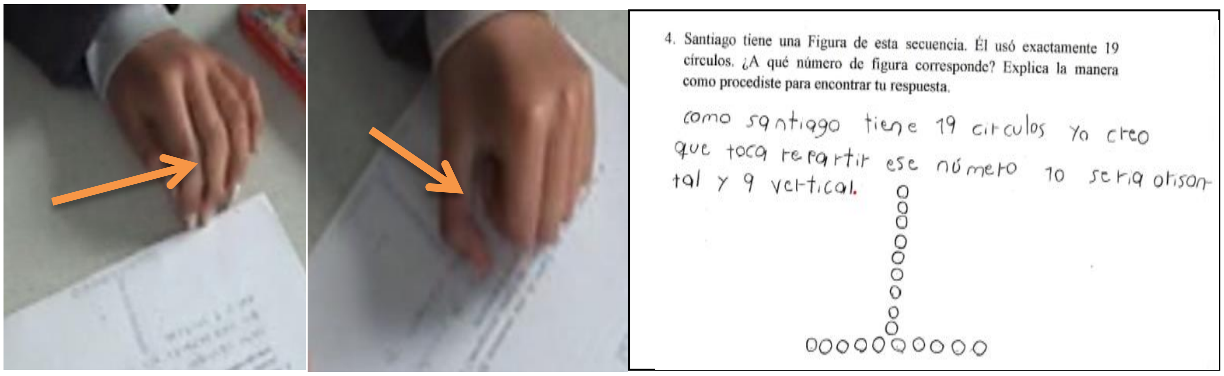


Figura 28. Secuencia de gestos como deslizamientos de Jenny. La imagen de la izquierda muestra el deslizamiento de la mano de Jenny indicando los círculos horizontales. La imagen del centro presenta un deslizamiento hacia arriba para indicar los círculos verticales. Reconstrucción del video. A la derecha, la producción de Jenny en relación con el ítem 4 de la Tarea 1.

El ítem 4 pretendía profundizar en el uso de la regularidad o en la captura del patrón. Dado un número de círculos particular de la secuencia, queríamos que los estudiantes explicaran la manera como procedieron para encontrar su respuesta. Si bien era una figura “construible” pues está en el campo perceptual de los estudiantes, queríamos que ellos movilizaran otros medios semióticos, por ejemplo recursos lingüísticos.

De acuerdo con las imágenes de la izquierda y del centro de la Figura 28, sugerimos que tanto la actividad perceptual como el deslizamiento de la mano están indicando una percepción espacial de la figura. El capturar la regularidad, sin embargo, no es suficiente para garantizar la generalización, pues tal regularidad debe generalizarse, es decir, transformarse en abducción.

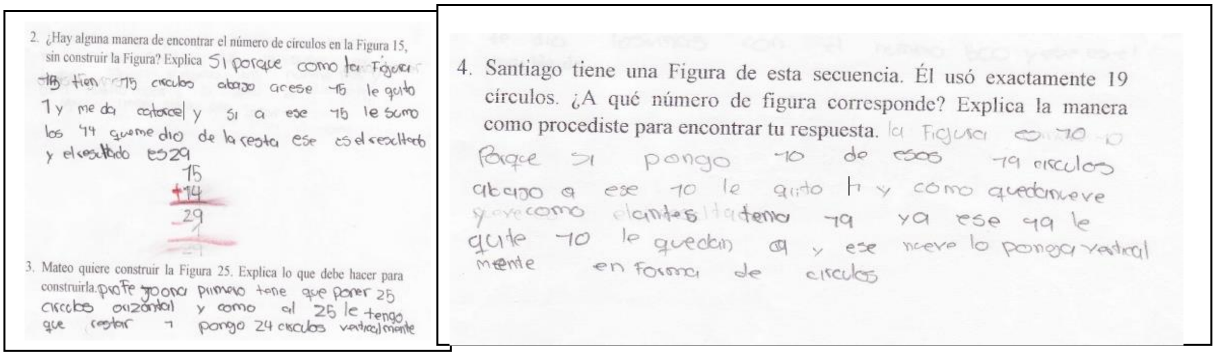


Figura 29. Producción de Luis Felipe sobre los ítems 2 y 3 de la Tarea 1

Las relaciones establecidas por Jenny son también puestas en funcionamiento por parte de Luis Felipe. En su respuesta al ítem 2, explicita la suma que le permite obtener el número de círculos en la figura 15. Este procedimiento le abona el camino para proponer el mensaje a Mateo en el ítem 3. Por su parte, con respecto al ítem 4, manifiesta que la figura es la 10 "*porque si pongo 10 de esos 19 círculos abajo a ese 10 le quito 1…*".

Observemos que en estas acciones los niños están operando sobre números, sobre casos particulares. Esta forma de proceder pone de presente funciones corporeizadas o predicadas con una variable tácita (Radford, 2010a), las cuales hacen parte de la instanciación del saber entendido como posibilidad, en este caso, pensamiento algebraico Factual, pues la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación o del discurso. Más bien, está presente a través de la aparición de algunos de sus casos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 15, 25, 500). No vemos explícitamente una analiticidad en tanto carácter operatorio de lo indeterminado, más bien estaríamos ante la presencia de una analiticidad intuida o proto-analiticidad.

Aceptamos que ello tiene que darse porque estamos estableciendo, en las tareas, exigencias que permiten a los estudiantes posibilidades de expresión semiótica, sin embargo, al mismo tiempo, éstas imponen limitaciones, pues inducimos a los estudiantes a centrar sus indagaciones en casos particulares. Consideramos que los requerimientos hechos en este contexto numérico propulsan formas culturales de interacción y de cooperación (Marx & Engels, 1970, citados por Radford, 2000a) que hacen pensar en que sus significados (culturales) necesariamente van a tener un anclaje histórico vinculado justamente con lo numérico. Dichos significados, mediados culturalmente (Bruner, 2006), están supeditados a un sistema de símbolos compartidos evidenciados en el tipo de preguntas o requerimientos que hacemos. Los sistemas semióticos de significación cultural (Radford, 2008a) están operando a través de las tareas que proponemos y de las actividades como eventos (i.e. tal y como se desarrollan).

Desde la perspectiva del materialismo dialéctico los modos de producción (Marx & Engels, 1970, citados por Radford, 2000a) incluyen saberes, habilidades y aspectos técnicos de colaboración, lo cual sugiere que los procedimientos efectuados por los estudiantes se incrustan en las formas culturales de interacción las cuales organizan el contacto entre los estudiantes y entre ellos y la profesora.

Las producciones sugieren que los estudiantes están actualizando una forma de pensamiento algebraico Factual, en tanto éstas están ancladas en un nivel particular o sobre hechos factuales, es decir, hay instanciación a través de operaciones con números y movilización de gestos como los deslizamientos mostrados en la Figura 28. Además, las evidencias sugieren las formas como los estudiantes entre ellos y cada uno de ellos con la profesora Johanna se involucraron en la actividad, de cómo ellos respondieron uno al otro en una labor conjunta (Radford, 2013a). En este sentido, cobran actualidad las relaciones $\boldsymbol{\Phi}$ y $\boldsymbol{\Theta}$ que conforman la estructura de nuestro Particular hegeliano. Los estudiantes están instanciando una forma de pensamiento algebraico (Factual) que ha quedado codificada en la cultura.

4.3.2 Tarea 2: Secuencia figural apoyada por representación tabular (2). Tal y como lo justificamos en el diseño de nuestra investigación, trabajar con la Tarea 2 pretendía acercar más a nuestros estudiantes no sólo a la idea general de secuencia sino también al tipo de secuencias figurales apoyadas por representación tabular. En este caso el término general corresponde a $2n + 3$, con $n = 1,2,3, \ldots$

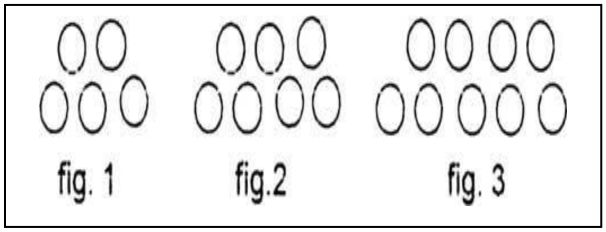


Figura 30. Secuencia figural apoyada por representación tabular (2) presentada en la Tarea 2

En relación con esta tarea nos vamos a detener en el análisis de las producciones correspondientes al item 6: *"Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para calcular rápidamente el número de círculos de la Figura 1000"*. El interés en este análisis focalizado está motivado por dos razones. En primer lugar, las producciones de los estudiantes a los ítems anteriores en esta tarea, en general, coinciden con las que se obtuvieron en la Tarea 1. En segundo lugar, queremos indagar más de cerca las instanciaciones o producciones en relación con este ítem.

Sin embargo, antes de abordar dicho análisis, nos parece pertinente indagar sobre el ítem 2: *"Calcula el número de círculos de la figura 9, sin construirla. Explica cómo lo haces"*. En este diálogo también interviene el autor de la presente investigación. La profesora Johanna indaga con varios estudiantes la manera como resolvieron el ítem 2 de esta tarea y en un momento de la interacción decide preguntar si algún alumno había respondido de manera distinta.

L1. Profesora Johanna: ¿Alguien lo construyó diferente?

L2. Laura Sofía: Sumando 9 más 9 da 18 y 3 [*pausa*] 21.

L3. Profesor Rodolfo: Y eso de 9 más 9, 18 ¿cómo lo haces en la figura?

L4. Profesora Johanna: Sí, enséñame acá en la figura [*señala con su mano la secuencia*] ¿cómo es?

L5. Laura Sofía: Porque 1 más 1 da 2 [*pausa*] [*tapa con sus dedos el primer círculo de la fila de arriba y el primero de la fila de abajo*] sumándole 3 [*hace circular su dedo alrededor de los tres círculos que sobran en la figura 1 después de contar el primero de la fila de arriba y el primero de la fila de abajo], [estos tres círculos los denomina "la torre"*].

L6. Profesora Johanna: ¿Y en la figura número 2?

L7. Laura Sofía: 2 más 2, 4 [*pausa*] [*a medida que habla señala los cuatro círculos antes de la torre a través de dos deslizamientos con su índice derecho, el primero sobre los primeros círculos de abajo hacia arriba y luego sobre los siguientes dos círculos de abajo hacia arriba*], sumándole 3 [*con su dedo índice derecho señala la torre*].

L8. Profesora Johanna: ¿Y en la figura 3?

L9. Laura Sofía: 6 [*pausa*] [*ubica su dedo pulgar derecho tapando el tercer círculo de arriba de izquierda a derecha*] y sumándole 3 [*con su dedo índice derecho señala la torre*].

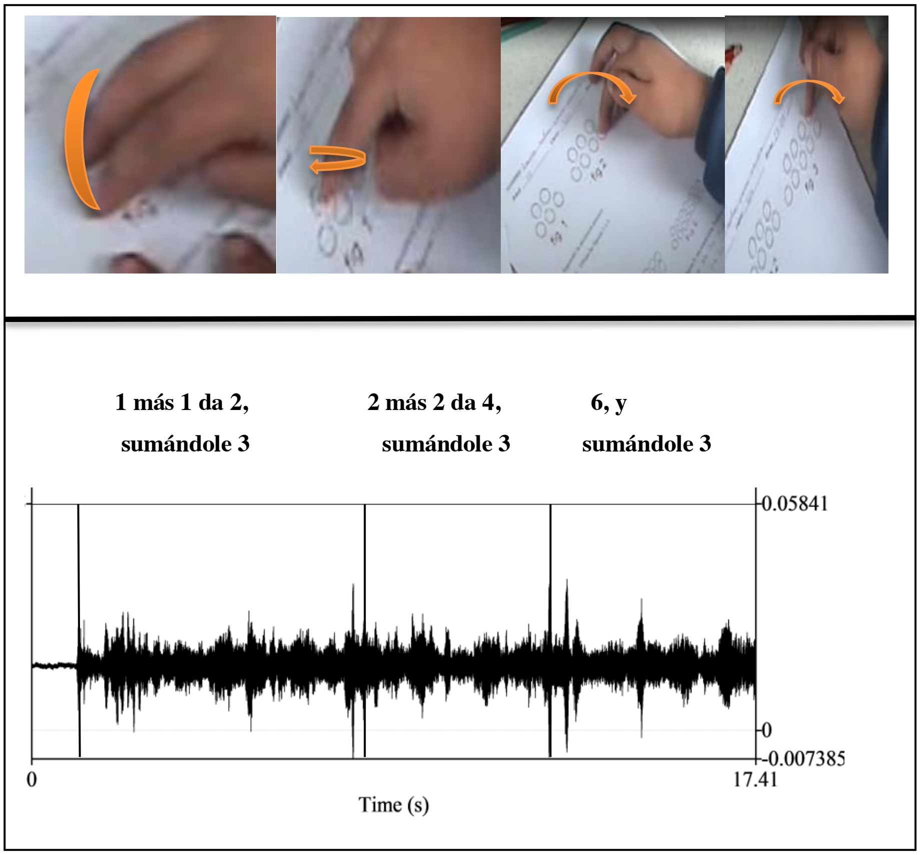


Figura 31. Arriba: Secuencia de gestos (señalamientos) que despliega Laura Sofía acompañada de palabras. Reconstrucción del video. Abajo: Un análisis prosódico en el programa Praat de las elocuciones de Laura Sofía (L5, L7, L9) con intervenciones de la profesora Johanna (L6 y L8)

La solicitud que hace el profesor Rodolfo (L3), "*Y eso de 9 más 9, 18 ¿cómo lo haces en la figura?*", provoca una respuesta en Laura Sofía. Ella despliega en la secuencia una serie de señalamientos los cuales recorren las tres figuras dadas. En la Figura 31, parte de arriba, se muestra la cadena de gestos como señalamientos que le permite comunicar a Laura Sofía la objetivación del patrón acudiendo a la torre como recurso semiótico. En la parte de abajo de la Figura 31 mostramos un fragmento de 17.41 segundos a través del programa Praat, en el cual ella en una estructura casi rítmica, como lo muestra la forma de onda, hace sus elocuciones “1 más 1 da 2, sumándole 3”, “2 más 2 da 4, sumándoles 3”, “6, y sumándole 3”. Mostramos en la Figura 32 la movilización de dos gestos indexicales. El primero corresponde a la acción de tapar los círculos subitizadamente y, al hacer una pausa, luego despliega el segundo gesto indexical señalando la torre. De esta manera procede con las figuras 2 y 3. Sin embargo, según las observaciones en el diálogo (L7) notamos que a medida que habla señala los cuatro círculos antes de la torre a través de dos deslizamientos con su índice derecho, el primero sobre los primeros círculos de abajo hacia arriba y luego sobre los siguientes dos círculos de abajo hacia arriba. En L8, por su parte, ubica su dedo pulgar derecho tapando el tercer círculo de arriba de izquierda a derecha para luego señalar de nuevo la torre. El análisis prosódico sugiere que el ritmo emerge como un medio semiótico de objetivación, evidenciado en el conteo, la pausa hecha y luego el gesto de señalar la torre. El ritmo crea la expectativa de un próximo evento (You, 1994), pero además, “constituye un medio semiótico de objetivación crucial para hacer aparente el sentimiento de un orden que va más allá de figuras particulares” (Radford, 2010b, p. 50).

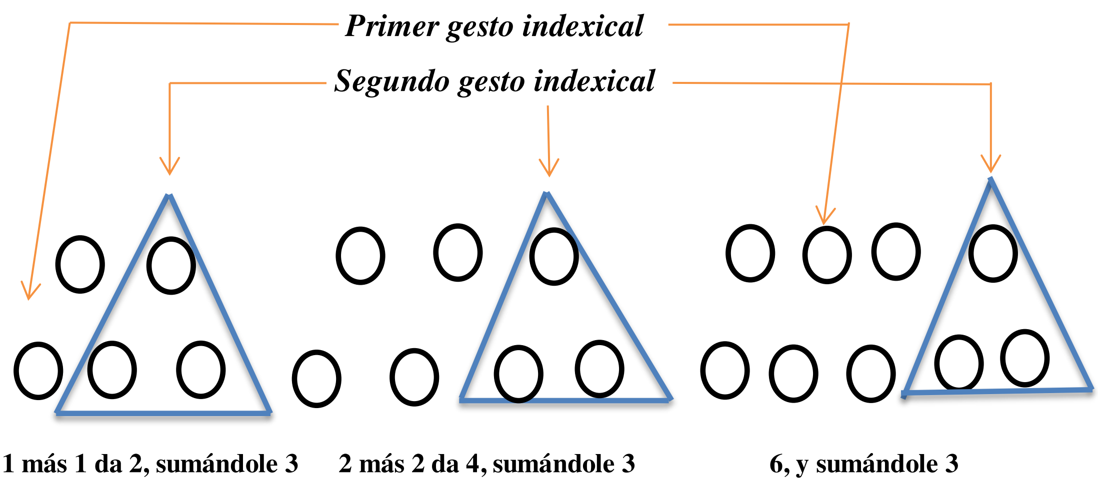
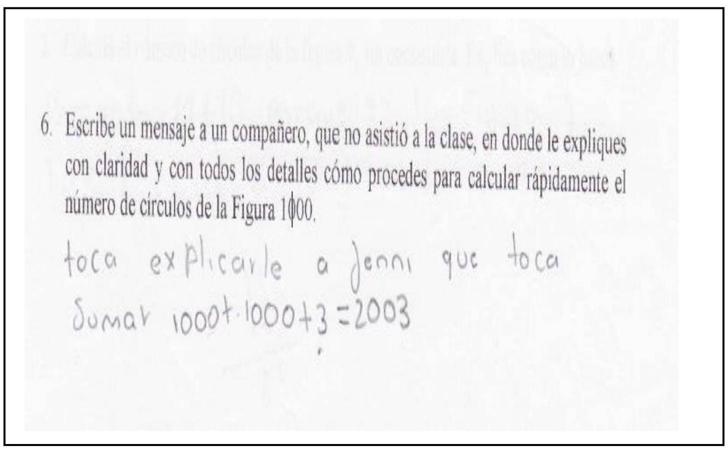


Figura 32. Movilización de gestos indexicales por parte de Laura Sofía

El recurso semiótico la torre que emerge se convierte en un medio semiótico de objetivación importante que le sirve, entre otras cosas, a Laura Sofía para contar el número de círculos de la fila de arriba y el de la fila de abajo, los cuales son iguales. En este proceso de semiosis perceptual, la actividad de coordinación de deícticos espaciales (gestos como señalamientos), ritmo, palabras y actividad perceptual, se convierte en un *nodo semiótico* que caracteriza la actividad reflexiva de Laura Sofía mediada por estos medios semióticos de objetivación.

El análisis microgenético (Vygotski, 1978) de su actividad sugiere el papel central que desempeñan los deícticos espaciales, gestos y el ritmo en la semiosis perceptiva (Radford, Bardini & Sabena, 2006), sobre todo en los procesos progresivos de Laura Sofía de la aprehensión perceptual del patrón y su generalización. En su actividad perceptual, al separar la torre, esta estudiante percibe la igualdad en el número de círculos de arriba y de abajo. Como lo sugiere Radford (2013b, p. 5), "la mirada con la que cada uno de nosotros percibe el mundo no es una mirada desinteresada".


6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para calcular rápidamente el número de círculos de la Figura 1000.

toca explicarle a Jenni que toca sumar 1000+1000+3=2003

Figura 33. Producción de Laura Sofía, ítem 6 de la Tarea 2

Inclusive, podemos ir más allá y afirmar que Laura Sofía en una forma subitizada cuenta el número de círculos de arriba y el número de círculos de abajo al notar la separación de la torre en la figura 3: *"6, y sumándole 3"*. Observemos que ella efectúa una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional. Este esquema permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos, a términos deícticos y gestos, como medios semióticos de objetivación. Esta generalización de acciones numéricas incrusta su huella en la sintaxis de la formulación que expresa en relación con el ítem 6. Su declaración: "*toca explicarle a Jenni que toca sumar 1000 + 1000 + 3*", sugiere la aplicación del esquema operacional pues la forma como ha procedido para calcular el número de círculos de las figuras 1, 2 y 3 la pone en marcha para el cálculo del número de círculos correspondiente a la figura 1000. Aquí lo indeterminado o lo general queda sin nombrar. En otras palabras, Laura Sofía ha afectuado una generalización algebraica Factual.

Consideramos la expresión semiótica producida por Laura Sofía como parte de la instanciación del saber, entendido éste como forma de pensamiento algebraico Factual (Radford, 2013a). Recordemos que desde nuestra epistemología hegeliana, el saber está constituido de formas siempre en movimiento de reflexión y acción histórica y culturalmente codificadas. Como dice Radford (2013a), el saber es pura posibilidad. Adquiere realidad a través de la actividad concreta tal y como se desarrolla. Esto es, el pensamiento algebraico Factual se actualiza a través del Particular, es decir, a través de la actividad en tanto evento. Esta actividad o labor conjunta se conforma no sólo de las preguntas y solicitudes emergentes que hace la profesora Johanna (L1, L4, L6, L8), sino también de la actividad semiótica de Laura Sofía a través de la movilización de recursos semióticos (L5, L7, L9). Observamos de nuevo aquí cómo el compromiso ético de la profesora respeta y valora las producciones de Laura Sofía. Este togethering (Radford & Roth, 2010) pone en emergencia la manera ética en que la profesora y la estudiante se involucran, responden y ajustan la una a la otra.

Desde nuestra perspectiva hegeliana, sugerimos que Laura Sofía está actualizando una forma cultural de acción y reflexión (una pura posibilidad) la cual se materializa en la actividad teórica sensorial (particularidad) de reflexión sobre lo que es requerido para responder acerca del mensaje de la Figura 33. Consideramos dicha reflexión sobre una secuencia específica como lo Singular o Individual en los planteamientos de Hegel. En términos de Radford (2013a), Laura Sofía lleva a cabo su actividad dentro de un particular e irrepetible actividad de salón de clase –un Particular, el cual es un único evento al escribir el mensaje en el que explica a un compañero cómo calcular rápidamente el número de círculos de la figura 1000 en un cierto momento y lugar y a través de una cierta relación con los compañeros y la profesora.

La discusión entre Laura Sofía, la profesora Johanna y el profesor Rodolfo es capitalizada por los demás compañeros de la clase. Particularmente, Luis Felipe se apropia de este recurso cultural (la torre), pero en realidad es apropiado por un buen número de estudiantes. En la Figura 34 mostramos parte del proceso de semiosis perceptual de Luis Felipe al identificar la torre.

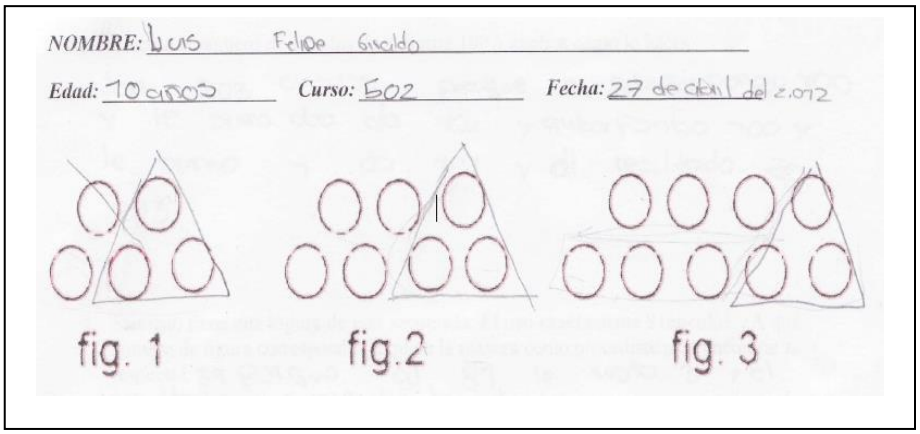
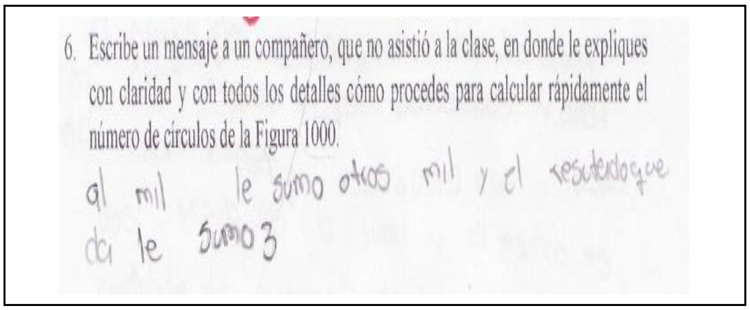


Figura 34. La torre como medio semiótico de objetivación presente en el proceso de semiosis perceptual de Luis Felipe

Este medio semiótico no es un mero recurso en el acto de conocer de los estudiantes. Funge como medio semiótico de objetivación en tanto media los actos intencionales de ellos. Las evidencias sugieren que las diversas instanciaciones del saber (en este caso el pensamiento algebraico Factual), esto es, el conocimiento que van logrando los estudiantes llega a ser *conocimiento-con la torre*, como opuesto a conocer vía la torre. Como lo sugiere Radford (2012b), estos artefactos se incrustan o encarnan en la manera en que los estudiantes piensan y llegan a conocer, lo que en términos de Cole & Wertsch (1996) se plantea en el sentido que estos instrumentos recrean y reorganizan la estructura del comportamiento humano.

En otras palabras, la torre, en tanto recurso semiótico, regula en cierto momento la actividad de estos estudiantes, condiciona las formas como ellos se apropian, construyen o re-significan dicha actividad y desde luego las maneras de pensar. Queremos subrayar, además, que los modos de pensamiento y de acción de los estudiantes, en relación con esta tarea, están regulados no sólo por la torre sino también por el tipo de situaciones que proponemos, en este caso, las secuencias figurales apoyadas por representaciones tabulares. Desde un punto de vista dialéctico materialista, podríamos señalar que los modos de producción (saberes, habilidades y aspectos técnicos de colaboración) son procedimientos culturales de producción y reproducción de la vida material y espiritual.

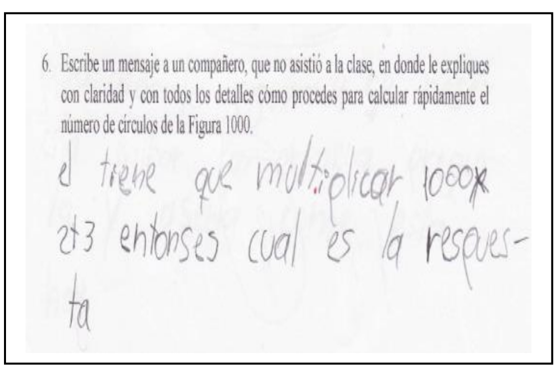
Destacamos aquí que para instanciar una forma de pensamiento como el algebraico Factual, es fundamental la experiencia de los estudiantes en el acto de conocer y el hecho de que esta experiencia está mediada por el propio cuerpo (Radford, Edwards & Arzarello, 2009; Arzarello, 2006), tal y como lo evidencian las actuaciones de los estudiantes en esta tarea.


6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para calcular rápidamente el número de círculos de la Figura 1000.

al mil le sumo otros mil y el resultadoque da le sumo 3

Figura 35. Producción de Luis Felipe, ítem 6 Tarea 2

La producción de Yaneth en relación con el ítem 6 de esta Tarea 2 (Figura 36) es diferente a la producción, por ejemplo, de Luis Felipe (en la Figura 35).


6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para calcular rápidamente el número de círculos de la Figura 1000.

el tiene que multiplicar 1000x 2+3 entonses cual es la respues-ta

Figura 36. Producción de Yaneth, ítem 6 Tarea 2

Tal diferencia reside en que la producción de Yaneth se hace sobre una forma reducida de expresión, *"él tiene que multiplicar 1000x2+3"*. La multiplicación sofisticada presente en la expresión de Yaneth sugiere una actividad perceptual refinada, en tanto hay evidencia de un proceso de subitización en la manera como percibe la figura (al ver que, una vez separada la torre, el número de círculos de la fila superior y el de la fila inferior son iguales). En la producción de Luis Felipe, *"al mil le sumo otros mil y el resultado que da le sumo tres",* se evidencia una escogencia de determinaciones sensibles en el terreno fenomenológico. Su intención perceptiva, dirigida a la estructura espacial, involucra la necesidad de sumar y por lo tanto sugiere una acción distinta en tanto descompone la figura en filas (la de arriba y la de abajo).

Observemos cómo la expresión de Yaneth utiliza una notación multiplicativa, podríamos decir, más condensada. La de Luis Felipe es aditiva, por lo que la producción de Yaneth sugiere una especie de proceso genético en el cual toma decisiones entre lo que se considera relevante e irrelevante, es un síntoma de aprendizaje y de desarrollo conceptual, es decir, de toma de conciencia.

Esta idea de conciencia individual la estamos considerando como una forma específicamente humana de reflexión subjetiva sobre la realidad concreta representada en la secuencia propuesta, a partir de la cual Yaneth se sensibiliza de esta forma u objeto cultural, el cual le permite considerar, reflexionar, comprender, disentir, objetar y sentir acerca de otros, en este caso de Luis Felipe. Sugerimos que Yaneth ha desplegado un proceso social, sensible y material de objetivación, en últimas, podemos afirmar, es un principio de contracción semiótica, en tanto en su producción se evidencia cierta sobriedad en su pensamiento, traducida en la expresión multiplicativa (*1000x2…)*. Esta sobriedad de su pensamiento se ve materializada en la forma condensada de las dos figuras que ha percibido, pues reduce o abrevia lo aditivo en la expresión semiótica de Luis Felipe (*al mil le sumo otros mil…)*.

Para Yaneth y Luis Felipe, la encarnación (*embodiment*) de la fórmula en la acción y en el lenguaje natural es potente, pero tiene sus límites. Lo indeterminado en sí no aparece como objeto de discurso. En este caso podríamos hablar, al menos, de dos indeterminadas o variables: el número de la figura (variable independiente) y el número de círculos en posición horizontal (variable dependiente).

En el siguiente diálogo, que corresponde a una entrevista focalizada, se pretendía indagar más de cerca sobre la manera como usaban la comunalidad que ya habían identificado para calcular el número de círculos de figuras remotas.

L10. Profesor Rodolfo: Por ejemplo si yo te pregunto a ti Sunner, ¿cuántos círculos? (...) o no ¿cuántos círculos?, miren, miren, escuchen la pregunta que yo le voy a hacer a Sunner. Así sin escribir nada. Me vas a escuchar nada más, ¿cómo haces para hallar?, ¿cómo haces para hallar el número de círculos?, ¿sí?, ¿cómo haces para hallar el número de círculos que tiene la figura 2000?

L11. Sunner: Mmm (…) multiplicando el resultado [*por 2*], entonces sería 4000 (…) 4000 (…) [*Mira a su compañero de grupo Kevin*].

L12. Kevin: 4003.

L13. Sunner: 4003.

L14. Profesor Rodolfo: Ahora entonces llegamos a 8000. Entonces Kevin, ¿cómo haces?, ¿cómo haces para hallar el número de círculos de la figura 8000?

L15. Kevin: (…) [*Sunner lo mira y frota los lápices mientras piensa la respuesta*].

L16. Profesor Rodolfo: No, no importa que no me multipliques pero dime ¿cómo lo haces?, dime el procedimiento.

L17. Kevin: (…) eh (…) que (…).

L18. Profesor Rodolfo: Porque, ¿qué tal que el número sea grandísimo?, bueno 8000 es grande. Bueno, pero ¿cómo haces para la figura 8000?, explica el procedimiento nada más, no importan los cálculos.

L19. Kevin: (…) toca multiplicar por 2.

L20. Profesor Rodolfo: Sí.

L21. Kevin: Y a lo que multiplico toca sumarle 3.

L22. Profesor Rodolfo: ¿Y por qué le sumamos 3?, yo estoy intrigado con ese 3, ¿por qué hay que sumarle 3?

L23. Kevin: Porque (…) [*Luis Felipe interrumpe a Kevin y responde*].

L24. Luis Felipe: Porque siempre le vamos a sumar acá, la torre [*Luis acude a señalar la figura No. 2 con dos dedos de su mano derecha haciendo énfasis en el lugar de la torre*].

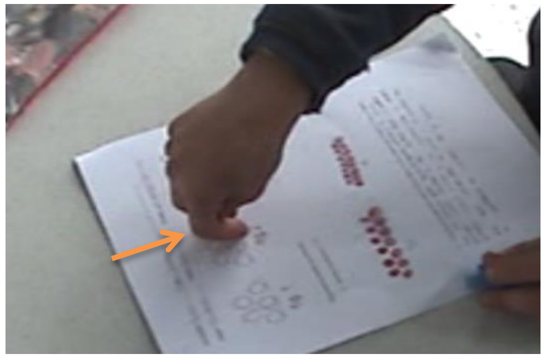


Figura 37. Luis Felipe moviliza el gesto de señalar la torre como apoyo para responder el número de círculos de la figura 8000

Luis Felipe interviene apoyando la respuesta de Kevin y justificando la suma del tres (esto es, los tres círculos que conforman la torre). Es más, este estudiante reconoce que el hecho de multiplicar por dos, tal y como lo declara Kevin (L19), emerge luego de separar la torre. Observemos que en su declaración en L24 "*siempre le vamos a sumar acá, la torre*", el deíctico temporal *"siempre"* sugiere el reconocimiento y uso del recurso semiótico, es decir, que esos tres círculos se deben sumar independientemente cuál sea la figura particular. El adverbio "*siempre*" evidencia una de las funciones generativas del lenguaje, es decir, funciones que hacen que sea posible describir procedimientos y acciones que potencialmente se pueden llevar a cabo en una forma reiterativa, imaginada (Radford, 2003). "Son expresiones lingüísticas *ad hoc* que transmiten la idea del esquema de abstracción que subyace a la generalización de las acciones" (Radford, 2003, p. 49). Por su parte a través del deíctico espacial *"acá"* Luis Felipe concentra la mirada en el lugar en el cual debe situarse la torre. Podemos afirmar que el lenguaje natural le sirve de apoyo para poder expresar una fórmula en acción. Esto sugiere pensar en la manera como los estudiantes usan el lenguaje natural o, más específicamente, ciertos elementos de este lenguaje (deícticos espaciales y temporales, por ejemplo) que indudablemente quedan muy implícitos en el lenguaje simbólico, esto es, en una fórmula algebraica (con signos alfanuméricos).

El diálogo en este grupo prosigue poniendo como ejemplos otras figuras remotas.

L25. Profesor Rodolfo: Jimmy la figura 80.000, ¿imposible de dibujar cierto? [*El profesor Rodolfo mira a Jimmy y Jimmy mueve la cabeza de manera afirmativa*], la figura 80.000, explícame el procedimiento para hallar el número de círculos de la figura 80.000.

L26. Jimmy: (…) ish, le sumo, le sumo otros 80.000, que daría 160.000.

L27. Profesor Rodolfo: Bueno, 160.000, sí y luego (…).

L28. Jimmy: Serían 160.000, luego le sumo 3.

En síntesis, el diálogo, como parte de la labor conjunta o actividad, sugiere que los estudiantes no sólo han tomado conciencia de la característica común sino que la han generalizado, es decir han propuesto una abducción, la cual se aplica a los términos subsecuentes de la secuencia. Esto les permite encontrar el número de círculos de figuras grandes o remotas. En L21, Kevin dice *"y a lo que multiplico toca sumarle 3",* refiriéndose a una figura "grande" particular. En L22, el profesor Rodolfo inquiere sobre la suma del *3*, ante lo cual Luis Felipe responde, en L24, apoyándose en la torre como recurso semiótico que emerge condicionando su actividad semiótica y su proceso cognitivo. En una especie de plasticidad semiótica (D´Amore, Fandiño & Iori, 2013, p. 82), Luis Felipe usa la torre y ésta de alguna manera influencia, modifica, incluso modela su mente. Observemos cómo a partir de la figura 2, él observa que aislando este recurso semiótico le quedan dos círculos arriba y dos abajo. Esto le permite responder adecuadamente en relación con el número de figuras remotas. En L26 y L28 Jimmy procede inicialmente de manera aditiva a través de sus determinaciones sensibles cuando percibe la secuencia y luego suma tres (es decir, los tres círculos de la torre que identificó Luis Felipe).

Del análisis de estas producciones es posible afirmar que hay generalización algebraica Factual en el sentido que le confiere Radford (2003, 2008b, 2013b). En efecto, la abducción o generalización de la característica común extraída del trabajo sensible sobre las figuras 1 a 4 (en el caso de la Tarea 1) y 1 a 3 (para el caso de la Tarea 2) es usada analíticamente. En otras palabras, la abducción, convertida en hipótesis, es aplicada para deducir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier figura particular. Esto tiene razón de ser debido a la estructura de nuestro Particular hegeliano (relaciones $\boldsymbol{\Phi}$ y $\boldsymbol{\Theta}$).

El tipo de preguntas o requerimientos que hacemos junto con la actividad desplegada influyen en el hecho de que la hipótesis sea aplicada. Por supuesto dicha hipótesis o principio asumido descansa sobre una generalización de acciones numéricas y en la forma de un esquema numérico.

A esta altura de la entrevista, el profesor Rodolfo inquiere a los estudiantes sobre lo que piensan es una figura cualquiera. Queríamos indagar más íntimamente los significados que le conferían al término cualquiera. Recordemos que sus producciones hasta este momento del trabajo son ejemplos de instanciaciones del pensamiento algebraico Factual el cual aparece como consecuencia de la actividad desplegada.

L29. Profesor Rodolfo: Bueno ahora, ahora yo les digo lo siguiente, para todos, para todos, aquí, mírenme acá, estoy hablando de la figura 1000, estoy hablando de la figura 2000, he hablado de la figura 8000, y he exagerado mucho y he hablado de la figura 80000, ustedes han respondido muy bien, y si yo les pregunto a ustedes, si me atrevo a preguntarles a ustedes, bueno eh, ya no es la figura ni 1000, ni 2000, ni 8000, ni 80000, sino que es (…) una figura una figura cualquiera, una figura cualquiera, cualquiera puede ser 1000, puede ser 2000, puede ser 8000, puede ser 80000, una figura cualquiera, si porque yo también les puedo preguntar la figura 3.458.678 y si yo les pregunto no esa figura sino, bueno y cuántos círculos tiene la figura 80.425.700 (…) y yo exagero, entonces si la figura es una figura cualquiera, cualquier figura, cómo ¿cómo harías tú Jimmy?

L30. Jimmy: ¿Cualquier figura?

L31. Profesor Rodolfo: Sí, ¿si fuera cualquier figura?

L32. Luis Felipe: ¿La que uno escogiera?

L33. Profesor Rodolfo: La que quieras.

L34. Jimmy: La 10.000.

L35. Profesor Rodolfo: La 10.000 por ejemplo, para cualquier figura él tomo la 10.000, pero ya sabes el procedimiento, entonces ese 10.000, ¿qué es lo que haces con ese 10.000?

L36. Jimmy: Le sumo otros 10.000.

L37. Profesor Rodolfo: Le suma otros 10.000 y al resultado (…).

L38. Jimmy: Le sumo 3.

L39. Profesor Rodolfo: Le suma 3, (…) eh para ti ¿qué es una figura cualquiera?, Kevin.

L40. Kevin: Que le puede (…) sumar, restar.

L41. Profesor Rodolfo: Sí pero de éstas, por ejemplo cuando yo le pregunté a Luis Felipe una figura cualquiera él me dijo, pues para mí una figura (…) para Jimmy una figura cualquiera puede ser la 10.000, para ti una figura cualquiera, para ti una figura cualquiera, ¿cuál puede ser?

L42. Yaneth: (…) [*Mira hacia arriba y Sunner baja la cabeza y le dice en voz baja el 30.000*] la 30.000.

L43. Profesor Rodolfo: Por ejemplo, para Yaneth una figura cualquiera puede ser la 30.000, pero ¿una figura cualquiera puede ser la 5?

L44. Yaneth: [*llevándose un dedo a la boca*] no.

L45. Kevin y Yaneth: ¡Sí!

L46. Profesor Rodolfo: Jimmy dice que no, que una figura cualquiera no puede ser la número 5, ¿por qué no Jimmy o sí?, ¿quién dijo no?, ¿tú por qué dices que sí Kevin?, una figura cualquiera puede ser la número 5.

L47. Kevin: Porque es igual que la 5 sino que… es igual… le suma 5 y (…).

L48. Profesor Rodolfo: Y luego le sumamos el 3, por ejemplo Sunner, para ti una figura cualquiera, ¿cuál puede ser?

L49. Sunner: Ehh (…) 6.000.

L50. Profesor Rodolfo: La figura 6.000, ¿para ti Kevin?

L51. Kevin: la 40.000.

L52. Profesor Rodolfo: ¿Para ti Luis Felipe?

L53. Luis Felipe: 11.000 [levantando el hombre izquierdo].

L54. Profesor Rodolfo: para ti (…).

L55. Jimmy: 80.000.

L56. Profesor Rodolfo: Para ti, otra figura cualquiera.

L57. Sunner: Ehh (…) la 50.000.

L58. Profesor Rodolfo: La 50.000, ¿para ti Yaneth?

L59. Yaneth: La 20.000 [pone los lápices en su boca].

Como se observa en esta parte del diálogo, para los estudiantes el significado de una figura cualquiera está asociado con figuras particulares. Con estas figuras ellos aplican acertadamente la comunalidad o característica común y ello les permite sin dificultades mayores encontrar el número de círculos para una figura dada particular. Es claro que la fórmula corpórea les funciona bien. El término “figura cualquiera” es, para los alumnos en general, una figura particular, la que ellos elijan, y ésta hace parte de una forma de hablar por parte de ellos, la cual está permeada por un constante flujo de sentido cargada axiológicamente (Bajtín, 1929/1992). Esta forma de lenguaje utilizada alimenta el tipo de generalizaciones que ellos pueden lograr, en este caso una generalización algebraica Factual.

Consideramos que esta forma de discurrir hace parte de su experiencia cultural. De acuerdo con Ratner (2000), dicha experiencia es un fenómeno cultural en tanto hecho social que se crea de manera colectiva y compartida. Sin embargo este pasado cultural experienciado por los alumnos puede evolucionar en tanto tengan la posibilidad de ser enfrentados a situaciones o tareas en las cuales se requiera o surja la necesidad de expresarse de otra manera sobre, en este caso, una figura cualquiera. En términos didácticos estaríamos propendiendo por hacer emerger formas de expresión a través de las cuales lo indeterminado sea nombrado, explícito, es decir, sea objeto de discurso.

En este estrato de pensamiento algebraico Factual la indeterminancia no alcanzó el nivel de la enunciación, pues se expresó en acciones concretas, por ejemplo, a través del trabajo sobre números y procesos de generalización de acciones numéricas. En este sentido podemos señalar que en este estrato la indeterminancia quedó implícita o, a lo más, mostrada pero a partir de casos o hechos particulares de números, o encarnada en la percepción, gestos y palabras. La forma de pensamiento algebraico Factual, en tanto posibilidad o forma ideal que pre-existe en la cultura (Radford, 2012a), fue instanciada en la actividad a través de los medios semióticos de objetivación movilizados por los alumnos (gestos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras). En otras palabras, es a través de la materialidad de la actividad que esta forma de pensamiento algebraico pudo aparecer y los estudiantes pudieron tomar conciencia de ella. En otras palabras, creamos condiciones particulares de interacción entre la forma ideal y los alumnos (Radford, 2012a) evidenciadas a través de la estructura de nuestro Particular hegeliano (relaciones $\boldsymbol{\Phi}$ y $\boldsymbol{\Theta}$) que permitieron un desarrollo en el pensamiento matemático de los estudiantes.

La expresión semiótica tuvo lugar a través de una actividad multimodal en la que intervienen los gestos, el ritmo, la percepción y las palabras. Los estudiantes constituyeron una fórmula encarnada en la acción y en el lenguaje (Radford, 2013b). De manera sintética, en términos de la epistemología hegeliana, la naturaleza de los tres vectores o componentes analíticos en los que el pensamiento algebraico (en este caso Factual) encuentra sus bases, está determinada por la estructura del Particular hegeliano.

4.3.3 Tarea 3: Secuencia numérica apoyada por representación tabular. En nuestro objetivo de investigación nos propusimos explorar este tipo de secuencias, entre otras cuestiones, porque queríamos indagar por los medios semióticos de objetivación que lograran movilizar los estudiantes al enfrentar secuencias que no cuentan con elementos geométricos-espaciales como en el caso de las secuencias figurales apoyadas por representación tabular. La secuencia que propusimos se genera a partir del término general $3n - 1$, con $n = 1,2,3, \ldots$

Una de las hipótesis que teníamos refería al hecho según el cual, al parecer, las secuencias figurales apoyadas por representación tabular movilizan formas perceptivas y gestuales en los alumnos que no parecen ser movilizadas, o al menos no con la misma intensidad, en el caso cuando se enfrentan a secuencias numéricas apoyadas por representación tabular.

2	***5***	***8***
Término 1	Término 2	Término 3

Figura 38. Secuencia numérica apoyada por representación tabular presentada en la Tarea 3

De nuevo, desde nuestra estructura del Particular hegeliano, la profesora Johanna introduce este tipo de secuencias a partir del siguiente diálogo:

L1. Profesora Johanna: En esta secuencia [*señalando en el tablero la secuencia de la Figura 38*] hice los cuadrados para poder escribirles esto [*escribe dentro de tres cuadrados dibujados en el tablero los números 2, 5 y 8*] listo. A partir de hoy no vamos a trabajar con las secuencias figurales, es decir ya no vamos a tener figuras ni círculos sino que vamos a empezar a trabajar con una secuencia numérica. ¿Qué significa eso? Que ahora ya no vamos a hablar de figura 1, figura 2, figura 3, etc., sino del término 1, término 2, término 3, (…) entonces miren el término 1 es (…) ¿quién?

L2. Estudiantes en coro: ¡2!

L3. Profesora Johanna: 2, el término 2 ¿quién es?

L4. Estudiantes en coro: ¡5!

L5. Profesora Johanna: El término 3 ¿quién es?

L6. Estudiantes en coro: ¡8!

L7. Profesora Johanna: Entonces con esa nueva secuencia vamos a tratar de hacer ejercicios como lo hicimos en las anteriores (…) voy a repartir el material.

Después de un trabajo individual por parte de los estudiantes, la profesora Johanna visita a varios grupos para indagar qué piensan sobre la secuencia y cómo han abordado la tarea. Esta intervención de la profesora tiene razón de ser en tanto su intención es hacer un trabajo conjunto para llevar a los alumnos a tomar conciencia de la relación numérica como primer paso hacia la objetivación de la característica común que se desprende de una lectura que atiende a la estructura numérica de la secuencia.

En un grupo en particular se encuentra Yaneth quien en su producción evidencia que ha identificado una regularidad a partir de su actividad perceptual sobre los tres primeros términos dados.

L8. Profesora Johanna: A ver yo quiero saber, a ver yo quiero saber qué tanto hablan, a ver cuéntame.

L9. Yaneth: Es que estamos averiguando cómo es que se (…) cómo (…) cómo se saca esta secuencia.

L10. Profesora Johanna: A ver ¿cómo?

L11. Yaneth: Entonces yo entiendo así que este (…) este [*apunta con el lápiz el Término 1 que corresponde al número 2*] le ponen 1 y si sumamos estos, estos (…) el 1 y el 2 quedan 3, y lo ponemos acá este 2 lo pasamos acá y le ponemos 3 queda 5 [*señala con su lápiz el número 5 correspondiente al Término 2*].

L12. Profesora Johanna: ¡5! ¡Ah bien! y ¿entonces?, ¿cómo sigo?

L13. Yaneth: Bueno, entonces el (…) el 5 se pasa para el 8 [*toma el lápiz y señala el término 2 y luego el término 3*] entonces a 3 le pongo 5 y me quedan (…).

L14. Estudiantes en coro: ¡8!

La profesora Johanna aborda a otra estudiante de este grupo (Sunner) para indagar sobre su producción en relación con el primer ítem de esta tarea, "¿*Cuáles son los números correspondientes a los Términos 4, 5 y 6. Explica":*

L15. Sunner: es: "11, Término 4; 14 Término 5; 17 Término 6, porque uno aumenta 3"

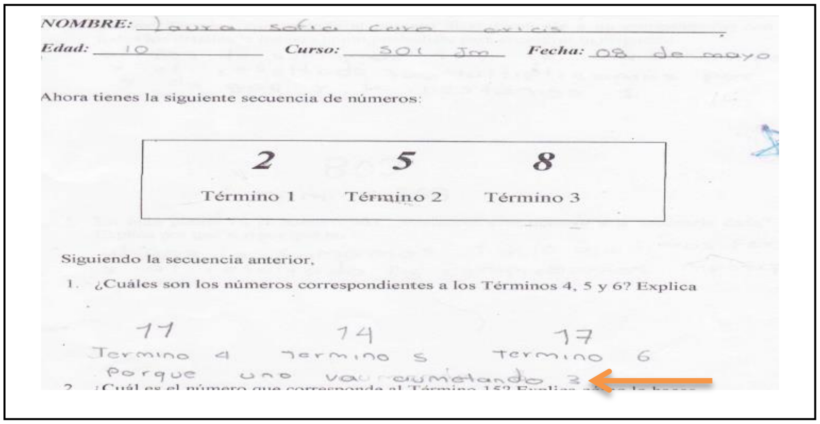
L16. Profesora Johanna: ¿Por qué?

L17. Sunner: Porque mire, 2 [*señala el Término 1*] más 3 son 5 [*señala el Término 2*] ¿sí? 5 aquí da 5 ¿sí? 5 más 3 son 8, sumándole 3.

L18. Profesora Johanna: Y entonces el cuarto término, ¿cuál sería?

L19. Sunner: 11.

Los estudiantes notaron sin mayores dificultades que los términos aumentaban en 3 (como se aprecia en L15: "*…porque uno aumenta 3*"), y utilizaron este incremento para calcular los números correspondientes a los Términos 4, 5 y 6. En L17 Sunner reafirma la identificación de esta característica común (*"sumándole 3"*), y frente al requerimiento de la profesora Johanna (L18) esta estudiante responde correctamente, lo cual sugiere que la comunalidad identificada le funciona para algunos términos particulares. Otra de las respuestas representativas se muestra en la producción de Laura Sofía en la Figura 39, *"porque uno va aumentando 3"*, lo cual sugiere su reconocimiento del patrón. La comunalidad, es decir aquello en virtud de lo cual los elementos se mantienen juntos, en este caso la relación entre los términos de la secuencia, ha sido identificada por Laura Sofía.


NOMBRE: Laura sofia caro arcis

Edad: 10 Curso: 501 Jm Fecha: 08 de mayo

Ahora tienes la siguiente secuencia de números:

2	5	8
Término 1	Término 2	Término 3

Siguiendo la secuencia anterior,

1. ¿Cuáles son los números correspondientes a los Términos 4, 5 y 6? Explica

11 Termino 4 14 Termino 5 17 Termino 6

porque uno va aumetando 3

Figura 39. Reconocimiento del patrón por parte de Laura Sofía en la secuencia investigada

La abducción aquí es utilizada para pasar de un término al otro (como en L15: "…*porque uno aumenta 3*"). Por el momento, no hay deducción de una expresión directa que permita calcular el número en cualquier término de la secuencia o al menos el de un término particular. Esta abducción permite generar un procedimiento pero no una expresión o regla directa, es decir, una fórmula, por lo que no hay generalización algebraica. En este caso tenemos una generalización aritmética.

En el siguiente diálogo la profesora Johanna reconoce, mediante una expresión de admiración (*¡Uyy! a todos nos dio igual*), haciendo hincapié en el trabajo de Laura Sofía, que las respuestas dadas a los Términos 4, 5 y 6 son acertadas. Procede a indagar por qué a todos los integrantes del grupo les dio la misma respuesta y solicita a Luis Felipe explicar cómo lo hizo.

L20. Profesora Johanna: Laura dice término número 4, 11, término número 5, 14, 14 [*señala en cada hoja de trabajo de los niños del grupo el término 5*], término número 6, 17. ¡Uyy! a todos nos dio ¿Por qué a todos le dio lo mismo?, ¿quién me explica?, ¿cómo lo hiciste?, a ver (…) ¿tú Luis?, a ver explícame.

L21. Luis Felipe: Por ejemplo, como esta es la figura 4, ¿no? [*señala el Término 4 con el esfero*].

L22. Profesora Johanna: Sí (…).

L23. Luis Felipe: Este 4 lo multiplico por 2.

L24. Profesora Johanna: Y bueno (…) y ¿qué pasa?, lo multiplicas por 2 y ¿qué?

L25. Luis Felipe: Y (…) el resultado que me dio le quito 1 (…) y le sumo cua (…) 4 más y ese es el resultado [*al respaldo de su hoja de trabajo aparecen las siguientes operaciones: 4x2 = 8-1 = 7+4 = 11*].

L26. Profesora Johanna: Y ¿ese es el resultado?

L27. Luis Felipe: Es 11.

L28. Profesora Johanna: Y ¿cómo obtuviste este 14? [*señala con su mano la respuesta del término 5 proporcionada por el estudiante*].

L29. Luis Felipe: Igual [*al respaldo de su hoja de trabajo él va efectuando, a medida que habla, las siguientes operaciones: 5x2 = 10-1 = 9+5 = 14*].

Las operaciones aritméticas que realiza Luis Felipe (observadas en las líneas L25 y L29) pretenden justificar sus respuestas en relación con los requerimientos de la tarea que hace la profesora Johanna. No tenemos evidencias para concluir que la estrategia llevada a cabo por este estudiante es de ensayo-error, pues lo más que podríamos decir es que su estrategia funcionó en el primer intento, si fue esto lo que efectuó. El trabajo llevado a cabo por Luis Felipe busca establecer ciertas relaciones entre los números de los términos y los números correspondientes o imágenes.

En la Figura 40 observamos la producción de Luis Felipe con respecto a los ítems 2 y 3. Su expresión en el ítem 2: *"44 porque al 15 le sumo otro 15 al resultado que me da le resto 1 y ase* [ese] *resultado le sumo 15",* y la del ítem 3 parte inferior izquierda: *"a el 100 le sumo otros 100 y el resultado que nos da le resto 1 y ase [ese] resultado le sumo 100"* sugieren que Luis Felipe logra una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional el cual permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos (Radford, 2003). Es interesante aquí notar que si bien este estudiante había comenzado con un procedimiento en el cual la abducción analítica o hipótesis no era clara, al parecer el esquema operacional adquiere mayor consolidación.

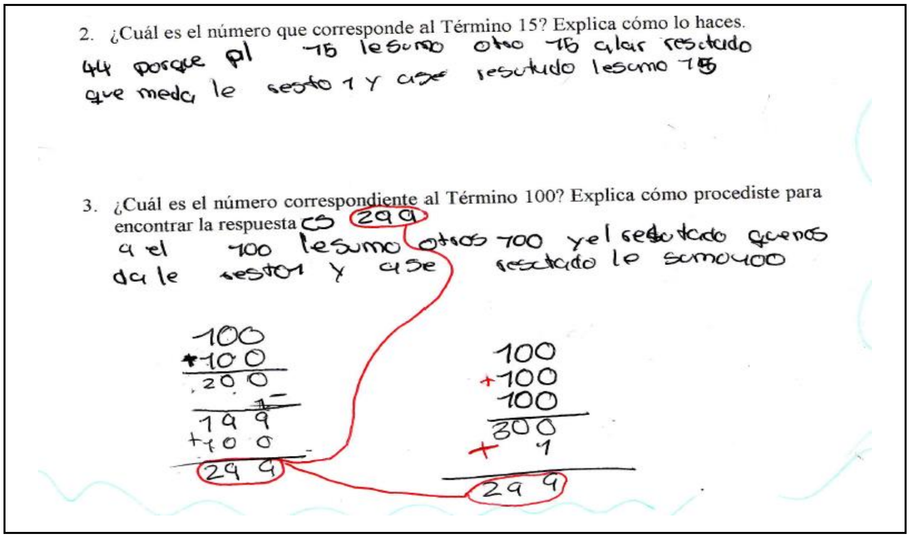


Figura 40. Producción de Luis Felipe sobre los ítems 2 y 3 de la Tarea 3

L30. Profesor Rodolfo: La pregunta es: “¿cuál es el término correspondiente al Término 100?”, ¿cómo lo hiciste?

L31. Luis Felipe: Pues al 100 (…) lo multiplico por 2, y le sumo otros 100 (…) que es lo mismo (…) ¿no?, y a ese resultado que me da (…) le resto 1.

L32. Profesor Rodolfo: Y ¿por qué le sumas otra vez 100?

L33. Luis Felipe: Porque siempre acá pasa, por ejemplo, en la figura (…) 1 [señala el Término 1 con el esfero].

L34. Profesor Rodolfo: Sí.

L35. Luis Felipe: Al 1 (…) le tengo que sumar (…) eh (…) a la 2 mejor, que es que esta no sé explicarla [*señala el Término número 2 con el esfero*]. Al 2 le tengo que sumar otros 2 ¿no?, entonces al resultado que me da, le quito 1, quedó el 3 [*señala el número*] (…) me queda convertido en 3, y a ese 3 (…) le quito (…) y a ese 3 (…) ¿qué? (…) y a ese 3 le sumo otros 2 y ese es el resultado (…) en todas, hasta en la 8 mira; al 3 [señala el Término 3 con el esfero], le sumo otros 3 (…) y al resultado que me da, le quito 1[*señala con el esfero el número que está al lado de la palabra “Término”, en el término 3*], y le sumo otros 3, le resto 1 y le sumo otros 3, y me da 8 [*traza una circunferencia con el esfero levantado, es decir, en el aire, alrededor del número ocho, del Término 3*] (…) siempre va a ser esa (…) un ejemplo (…) al 100 le sumo otros (…) o lo multiplico por 2 o le sumo otros 100.

L36. Profesor Rodolfo: Bueno entonces, si lo sumas, le sumas otros 100, te dio 200.

L37. Luis Felipe: Como si lo multiplicara por 2.

L38. Profesor Rodolfo: Y luego al 200 le restas 1, ¿por qué le restas 1 Luis?

L39. Luis Felipe: [*Luis indica con el esfero la operación que realizó para la respuesta del punto 3 del taller*] porque (…) o también uno no lo podría hacer así sino (…) le pondría así [*hace el movimiento de repisar la operación que hizo en el aire*], no le restaría 1, sino que le pusiera el 99 más, le sumaría 99 más.

L40. Profesor Rodolfo: Y ¿por qué lo haces así? [*Luis no brinda una respuesta transcurridos tres segundos*] porque aquí (…) aquí (…) este 100 [*señala el 100 de la operación con su índice derecho*] (…) como la pregunta es "¿cuál es el número correspondiente al Término 100? [*sigue la lectura de la pregunta con el dedo índice derecho*]" tú coges el 100, y le sumas otros 100.

L41. Luis Felipe: Sí (…) porque al término le sumo este mismo [*indica el término con el esfero*].

L42. Profesor Rodolfo: ¿Por qué?, ¿por qué le sumas el mismo?

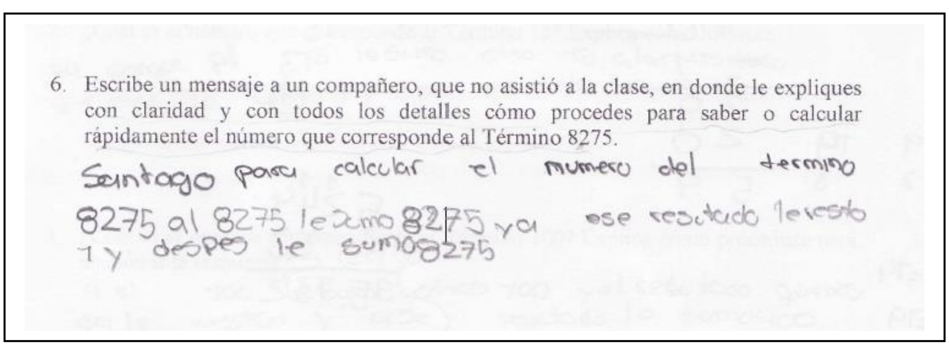
L43. Luis Felipe: ¡Porque en todos pasa lo mismo! [*en un tono enfático*].

Observemos cómo a partir de la línea L30 parece empezar a consolidarse una hipótesis. Aun cuando siente la necesidad de regresar a un término que está dentro de su campo perceptivo (en L35 *"...Al 2 le tengo que sumar otros 2 ¿no?, entonces al resultado que me da, le quito 1, quedó el 3 [señala el número] (...) me queda convertido en 3, y a ese 3 (...) le quito (...) y a ese 3 (...) ¿qué? (...) y a ese 3 le sumo otros 2 y ese es el resultado"*) para responder a la pregunta del profesor Rodolfo, ¿por qué le sumas otra vez 100?, el esquema operacional le permite abordar prácticamente cualquier caso particular con éxito. Luis Felipe en L35 declara que "*siempre va a ser esa (...) un ejemplo (...) al 100 le sumo otros (...) o lo multiplico por 2 o le sumo otros 100"*, para referirse a una manera de ver que al término se le suma el mismo término. El adverbio "*siempre*" incluido en su declaración hace destacar funciones generativas del lenguaje, esto es, ciertas funciones que hacen posible describir procedimientos y acciones que potencialmente se llevan a cabo de una forma reiterativa e imaginada. Son expresiones lingüísticas ad hoc que sugieren la idea del esquema de abstracción que subyace a la generalización de las acciones. Frente a la insistencia del profesor Rodolfo en L42, *"¿por qué le sumas el mismo?"* para referirse al hecho que tú toma el 100 y le suma otro 100, Luis Felipe en L43 responde en tono enfático, *"¡Porque en todos pasa lo mismo!"*

Luis Felipe efectúa una generalización algebraica Factual. Esto es, una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional que permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos y gestos como señalamientos o apuntamientos, lo cual le permitió ir más allá de los tres primeros términos y hacer evidente un patrón para determinar el número de cualquier término específico (por ejemplo, el 15 o el 100).

El análisis de la evidencia sugiere que la actividad semiótica en este contexto numérico no invita a pensar la indeterminancia de manera analítica (es decir, en el sentido de Viète). Aun cuando tenemos evidencia de una cierta indeterminancia, instanciada en acciones concretas, pues se debe hallar algo (el número correspondiente al Término 100, por ejemplo), ésta debe volverse explícita y hay necesidad de nombrarla, volverla objeto de discurso, esto es, transformarse en una indeterminancia analítica o algebraica.

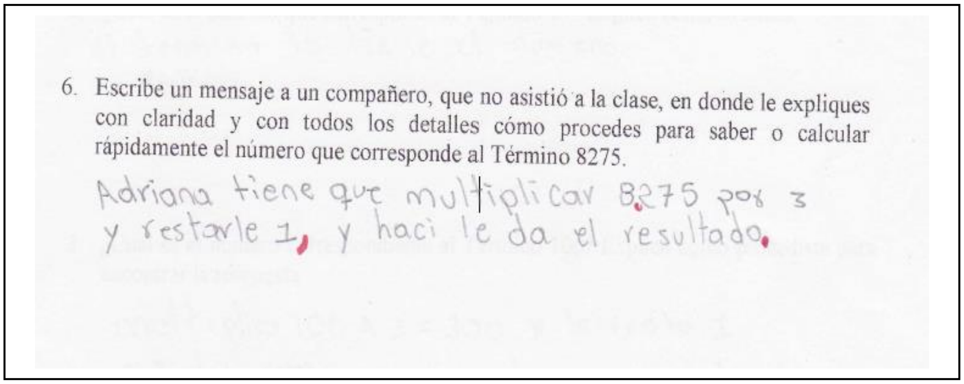
Esta indeterminancia intuida es también instanciada a través de las producciones de Luis Felipe, Jennifer, Jimmy Stiven y Laura Sofía, con matices distintos, cuando responden al item 6 de esta tarea: *"Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para saber o calcular rápidamente el número que corresponde al Término 8275"*.



6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para saber o calcular rápidamente el número que corresponde al Término 8275.

Santiago para calcular el numero del termino
8275 al 8275 le sumo 8275 y a ese resultado le resto
1 y despes le sumo 8275

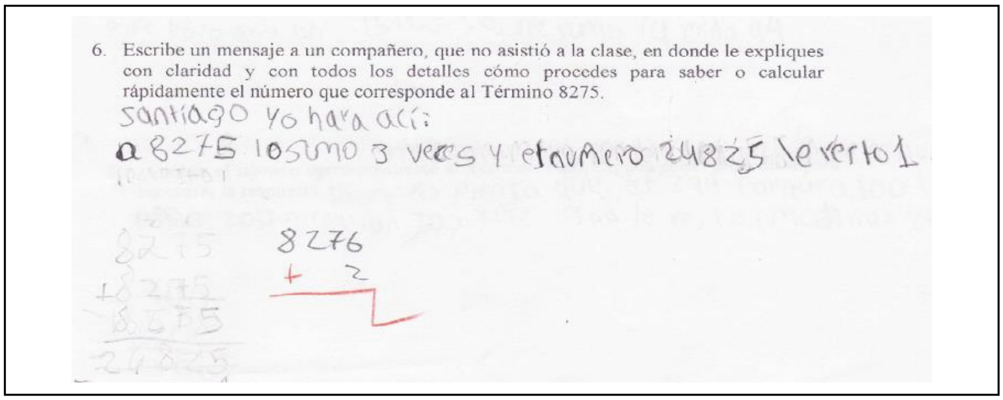
Figura 41. Producción de Luis Felipe, item 6, Tarea 3



6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para saber o calcular rápidamente el número que corresponde al Término 8275.

Adriana tiene que multiplicar 8275 por 3 y restarle 1, y hací le da el resultado.

Figura 42. Producción de Jennifer, ítem 6, Tarea 3

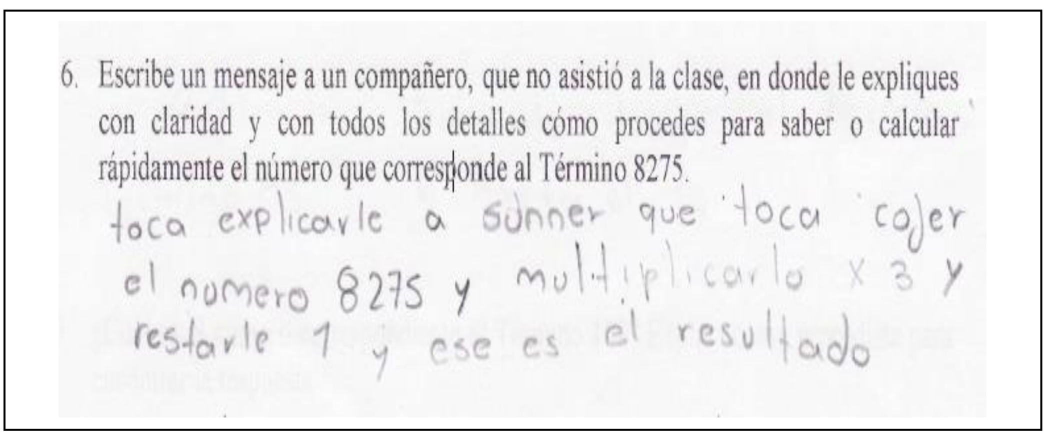


6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para saber o calcular rápidamente el número que corresponde al Término 8275.

santiago yo hara ací:
a 8275 losumo 3 veces y el numero 24825 le resto 1

8276
+ 2

Figura 43. Producción de Jimmy Stiven, ítem 6, Tarea 3



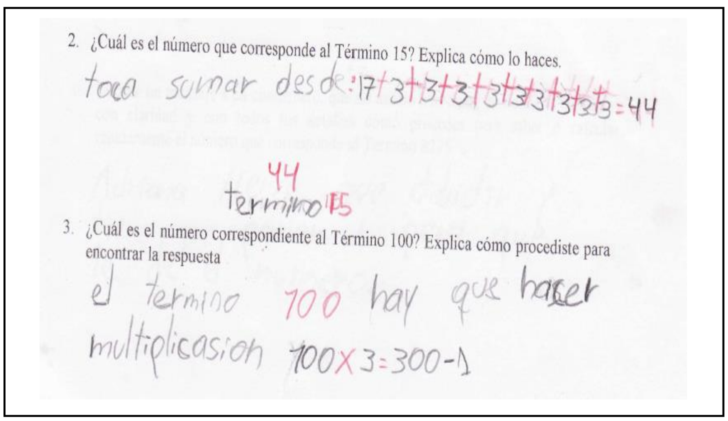
6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para saber o calcular rápidamente el número que corresponde al Término 8275.

toca explicarle a sunner que toca cojer el numero 8275 y multiplicarlo x 3 y restarle 1 y ese es el resultado

Figura 44. Producción de Laura Sofía, ítem 6, Tarea 3

En síntesis, las producciones de estos estudiantes con respecto al ítem 6 de la tarea en cuestión, aunque con matices distintos, evidencian que a través de sus procedimientos, al igual que el de Luis Felipe, el esquema operacional forjado por este último es acogido por sus demás compañeros. Esto les permite abordar prácticamente cualquier caso particular con éxito, como en el caso del Término 8275. El contenido del ítem 6, esto es, el requerimiento, parece obligar a los estudiantes a movilizar otros medios semióticos de objetivación como recursos lingüísticos, los cuales aún quedan atrapados en el esquema operacional que ha emergido a través de una generalización de acciones.

Yaneth, por su parte, instancia una forma aditiva para responder al número que corresponde al Término 15 (ítem 2) (Figura 45, parte superior). Su producción con respecto al ítem 2, *"toca sumar desde:* $17 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 44$", sugiere que el número 9 obtenido por la diferencia entre el Término 15 y el Término 6, determina las veces que debe repetirse el número 3 en la suma, anclándose en 17 que corresponde al Término 6.


2. ¿Cuál es el número que corresponde al Término 15? Explica cómo lo haces.

toca sumar desde: 17+3+3+3+3+3+3+3+3+3=44

44

termino 15

3. ¿Cuál es el número correspondiente al Término 100? Explica cómo procediste para encontrar la respuesta

el termino 100 hay que haser multiplicasion 100X3=300-1

Figura 45. Producción de Yaneth sobre los ítems 2 y 3 de la Tarea 3

La característica común identificada por Yaneth (aumentar 3) a partir de su respuesta al ítem 2 es generalizada y aplicada para encontrar el número que corresponde al Término 15. Esta abducción (generalización de la característica común) es utilizada como simple posibilidad, es decir algo que es solamente plausible (Radford, 2013b). La evidencia de su producción sugiere que la abducción no es utilizada de manera analítica. Más específicamente, Yaneth parece recurrir a una generalización muy sofisticada que se podría simbolizar así: Se parte de un término cualquiera conocido T_a y se quiere hallar T_n. Entonces ella procede haciendo $T_a + (n - a)x3 = T_n$. De acuerdo con Radford (2008b), Yaneth efectúa una generalización aritmética. No es de naturaleza algebraica, pues la abducción no se constituye en principio asumido o hipótesis para deducir apodícticamente (Radford, 3013b) una fórmula que le proporcione el número correspondiente a cualquier término de la secuencia numérica. Esto es, la abducción no es todavía analítica. En este momento de la actividad la ausencia de elementos espaciales o geométricos (que sí comportan las secuencias figurales) parece provocar un trabajo de generalización por parte de Yaneth basado en relaciones entre números. Esto sugiere pensar que no existe tránsito entre la abducción y la hipótesis (abducción analítica). El contar con secuencias figurales propulsa una articulación de las estructuras espacial y numérica, lo cual constituye un aspecto importante del desarrollo del pensamiento algebraico. La descomposición de figuras permite la creación de relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas y hacer cálculos sin distinguir entre éstas.

Sin embargo, en relación con el ítem 3 Yaneth parece poner en marcha el esquema operacional puesto en funcionamiento por los anteriores compañeros. Las formas de pensar y de producción del saber de nuestros alumnos necesariamente están vinculados con las formas culturales e históricas de interacción humana y cooperación, esto es, la normatividad y reglamentación entre individuos (Marx & Engels, 1970, citados por Radford, 2000a). Ella expresa que: "*el término 100 hay que hacer multplicasion 100x3 = 300 - 1"*. Claramente se observa una interpretación del signo igual como operador, sin embargo lo que nos interesa resaltar aquí es que en la expresión "*100x3 = 300 – 1",* Yaneth ha logrado concretar una generalización de acciones.

Queremos llamar la atención aquí sobre dos aspectos que nos parecen relevantes. En primer lugar, el análisis de las estrategias de generalización de los estudiantes en la secuencia numérica con apoyo tabular sugiere que la estructura del Particular hegeliano (relaciones $\boldsymbol{\Phi}$ y $\boldsymbol{\Theta}$) juega un papel importante en el tipo de generalizaciones que puedan efectuar los estudiantes. Inicialmente al parecer nos topamos con formas sofisticadas de generalización aritmética en las cuales la analiticidad no aparece explícitamente. Estas formas sofisticadas de generalización aritmética parecen estar muy cerca de proto-formas de pensamiento algebraico basadas en una proto-analiticidad. Insistimos que la estructura del Particular hegeliano juega un papel importante en esta relación de cercanía. Transcurrida la actividad y con los requerimientos hechos, por ejemplo *"Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para saber o calcular rápidamente el número que corresponde al Término 8275"*, parece propulsarse un tipo de generalización Factual. Desde luego la interacción entre los estudiantes sirve de elemento persuasivo para poder adquirir esquemas operacionales que han sido derivados de generalizaciones de acciones.

En segundo lugar, la discusión planteada pone de presente dos tipos de analiticidades. Vamos a llamar analiticidad *GA*, la que refiere a las deducciones que se hacen a partir de ciertas premisas, la cual es característica de la generalización algebraica (Radford, 2013b). Otra analiticidad, llamémosla *PA,* asociada con el carácter operatorio de lo desconocido, una de las características del pensamiento algebraico (Radford, 2010b). Desde luego este último tipo de analiticidad no ha emergido aún de manera explícita y quizás lo que estemos presenciando es una proto-analiticidad asociada más directamente con el abordaje de la secuencia numérica con apoyo tabular.

4.3.4 Tarea 4: El Problema del Mensaje. A esta altura del trabajo, durante las sesiones, queríamos que los estudiantes nombraran la indeterminancia algebraica o analítica. Desde nuestra aproximación vygotskiana, decidimos proponer el *Problema del Mensaje* para intentar lograr un desarrollo en la forma de pensamiento de los estudiantes. Más específicamente, queríamos, a través del trabajo con este problema, hacer aparecer formas más complejas de pensamiento algebraico. En términos de la epistemología hegeliana, estábamos interesados en orquestar una actividad que intentara propulsar el saber (que lo hiciera evolucionar), entendido a esta altura del trabajo, como forma de pensamiento Factual.

Para recordar, el Problema del Mensaje que propusimos tomaba como base la secuencia figural apoyada por representación tabular de la Tarea 2.

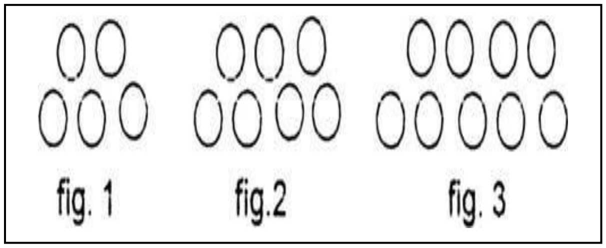


Figura 46. Secuencia figural apoyada por representación tabular que sirvió de base para plantear el Problema del Mensaje

El Problema lo planteamos en los siguientes términos:

"La profesora Johanna tiene una bolsa y dentro de ella introduce varias tarjetas, cada una con un número. Cada uno de estos números corresponde a una de las figuras de la secuencia anterior. Ella saca al azar una tarjeta y la introduce en un sobre, asegurándose de que ningún estudiante haya visto el número de la tarjeta. Johanna quiere que el sobre sea enviado a la profesora Estella con un mensaje que será introducido en el sobre junto con la tarjeta que contiene el número. Este mensaje debe explicar a la profesora cómo calcular rápidamente el número de círculos que corresponde al número de la tarjeta".

Los estudiantes abordaron la tarea en forma individual y luego de unos minutos el profesor Rodolfo, en la siguiente entrevista focalizada, se reúne con un grupo para preguntarles acerca de la naturaleza del problema y sobre qué dificultades tuvieron al desarrollar la tarea, en un trabajo de acción conjunta.

L1. Profesor Rodolfo: Dígame alguno ¿cuál era como la dificultad?, ¿qué era lo que no entendían? o ¿cuál fue como realmente el problema para poder escribir el mensaje? Por ejemplo, tú Jennifer.

L2. Jennifer: La dificultad era no saber el número en la figura, porque uno ¿cómo iba a hacer el mensaje sin saber el número de la figura? [*señala una hoja en donde están dibujados algunas de las secuencias figurales de la actividad*].

L3. Profesor Rodolfo: ¿Tú quieres agregar algo Jimmy?

L4. Jimmy Stiven: Lo mismo que ella.

L5. Profesor Rodolfo: ¿Quién tiene algo distinto?, ¿ese era como el problema, como la dificultad? [*La mayoría de los niños asienten con la cabeza*]. Y aun esa dificultad, que no sabían cuál era el número, porque el número era un número desconocido, un número (…)

L6. Jimmy Stiven: Cualquiera.

L7. Profesor Rodolfo: ¿Cómo?

L8. Jimmy Stiven: Cualquiera.

L9. Profesor Rodolfo: No te escucho.

L10. Jimmy Stiven: Cualquiera.

La actividad luego se concentra en revisar específicamente la producción de Jimmy Stiven. Él explica al profesor Rodolfo y a los demás compañeros del grupo el mensaje que escribió a la profesora Estella. Es interesante aquí ver cómo una vez escribe su mensaje se remite a la secuencia, particularmente a la figura número 2, que le sirve de apoyo para hacer su explicación. En este proceso retorna a la torre como ejemplo para apoyar y afianzar su mensaje.

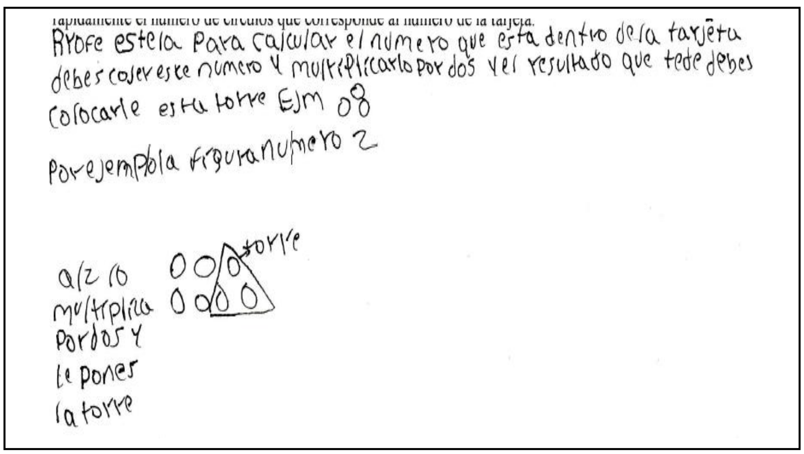


Figura 47. Producción de Jimmy sobre la Tarea 4, Problema del Mensaje

En dicho proceso Jimmy Stiven, con sus dedos, realiza una serie de deslizamientos acompañados con acciones de tocar la figura 2 de la secuencia. Mientras que con su dedo índice de la mano izquierda señala y toca el número de la figura, con su dedo índice de la mano derecha empieza a recorrer la torre en una especie de deslizamiento oblicuo (parte superior, imágenes izquierda y derecha de la Figura 48). Observamos aquí dos gestos que moviliza Jimmy Stiven los cuales tienen roles distintos. Las imágenes izquierda y derecha de la parte inferior de la Figura 48 muestran el deslizamiento hacia abajo y luego horizontal de sus dedos para terminar de señalar la torre al mismo tiempo que con su dedo índice izquierdo señala y toca el número de la figura.

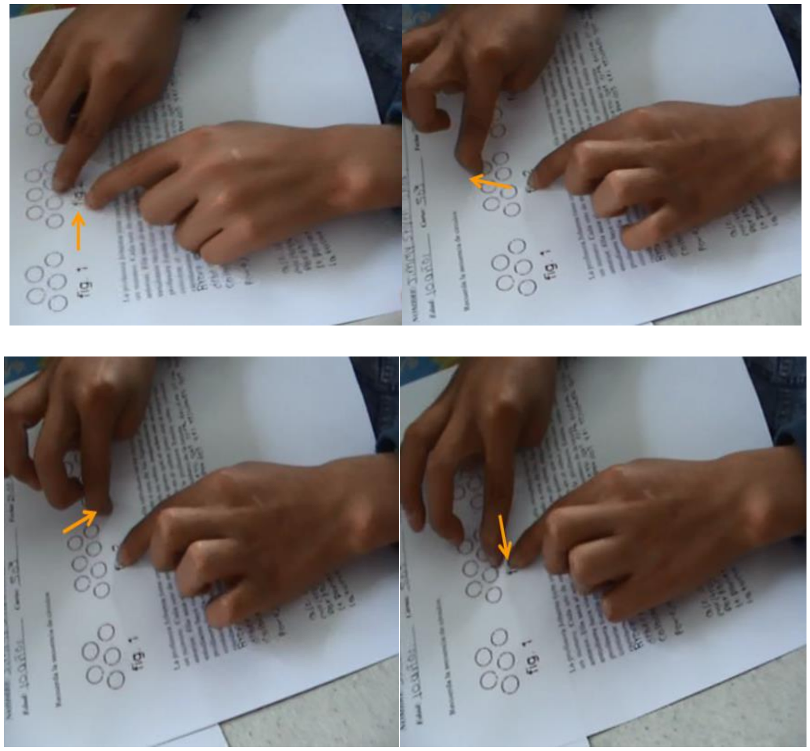
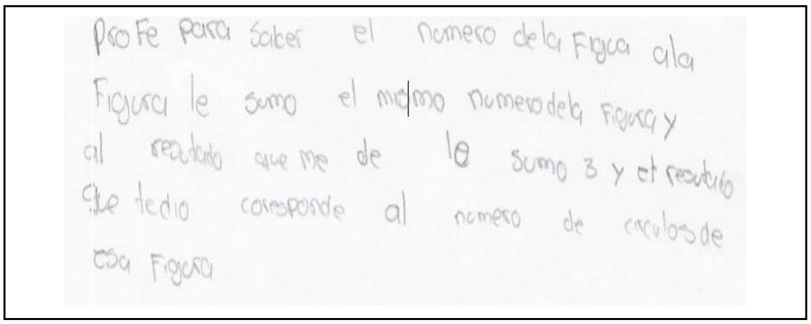


Figura 48. Secuencia de gestos (señalar y tocar) de Jimmy Stiven que le sirve de apoyo en el mensaje dirigido a la profesora Estella. Reconstrucción del video

Esta serie de gestos (deslizar y tocar) funge como apoyo a Jimmy para reafirmar el mensaje escrito a la profesora Estella. Si bien él ya elaboró un mensaje que permite calcular el número de círculos para cualquier figura a partir del término general $2n + 3$, Jimmy siente la necesidad de dar un ejemplo, el cual involucra la torre. Este proceso de señalar, tocar y deslizar combinado con palabras para explicar la manera de calcular el número de círculos de una figura cualquiera lo entendemos como una fórmula corpórea o corporeizada. Más aún, dicha acción lingüística-perceptiva-gestual se convierte en un *nodo semiótico* (Radford, 2013b), esto es, un segmento de la actividad semiótica en la que signos pertenecientes a diferentes sistemas semióticos (Radford, 2003) se complementan para generar una toma de conciencia, en este caso, de la manera en que la tarea puede ser atacada desde un punto de vista algebraico.

La indeterminancia, en este caso de la producción de Jimmy, está representada por la sentencia o frase *"el numero que esta dentro de la tarjeta"*. Observemos, de un lado la expresión semiótica o designación simbólica a través de un recurso lingüístico y, de otro lado, el carácter operatorio "*debes coger ese numero y multiplicarlo por dos y ese resultado que te de debes colocarle esta torre ejm* 

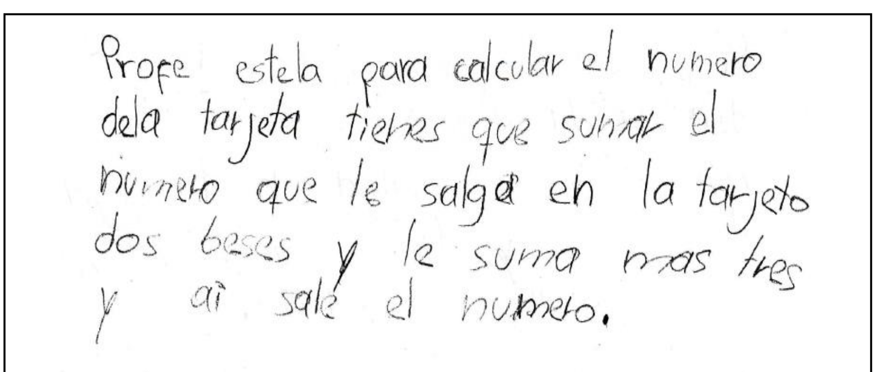
La producción de Luis Felipe, por su parte, en relación con el problema mencionado aparece en la Figura 49.



Profe para saber el numero dela Figura ala Figura le sumo el mismo numero dela Figura y al resultado que me de le sumo 3 y el resultado que te dio corresponde al numero de circulos de esa Figura

Figura 49. Producción de Luis Felipe sobre la Tarea 4, Problema del Mensaje

En este caso, designa la indeterminancia con el término "*figura*", la cual es tratada analíticamente: *"a la figura le sumo el mismo número de la figura y al resultado que me dé, le sumo 3"*. La expresión semiótica de la indeterminancia en el caso de la producción de Yanteh (Figura 50) es *"el numero que le salga en la tarjeta"* y su carácter operatorio o analiticidad: *"sumar el número que le salga en la tarjeta dos beses y le suma mas tres"*



Profe estela para calcular el numero dela tarjeta tienes que sumar el numero que le salga en la tarjeto dos beses y le suma mas tres y ai sale el numero.

Figura 50. Producción de Yaneth sobre la Tarea 4, Problema del Mensaje

En la Figura 51 presentamos el mensaje elaborado por Sunner. La expresión semiótica de la indeterminancia aquí es "*el numero que te entregaron*" y el carácter operatorio se traduce en *"el numero que te entregaron tienes que multiplicarlo por 2 y el numero que te dio le sumas 3"*

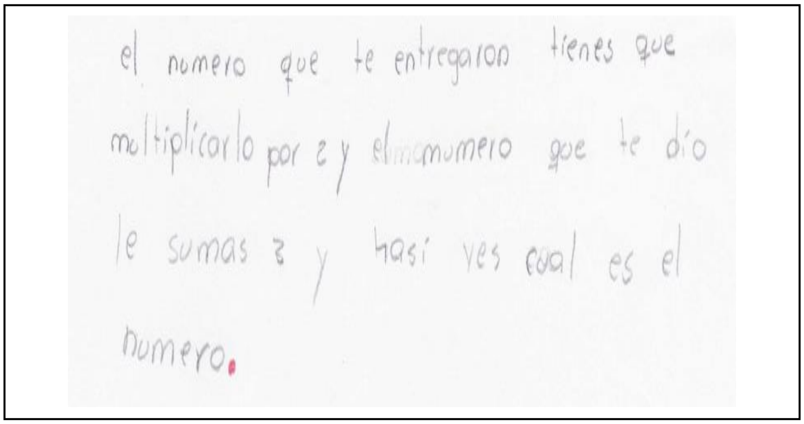

el numero que te entregaron tienes que multiplicarlo por 2 y el numero que te dio le sumas 3 y hasi ves cual es el numero.

Figura 51. Producción de Sunner sobre la Tarea 4, Problema del Mensaje

La designación simbólica de la indeterminancia en el caso de la producción de Astrid (Figura 52) es *"el numero que este en la cartulina";* por su parte el carácter operatorio está declarado en la sentencia *"el numero que este en la cartulina lo tienes que colocar en la parte de arriba y en la parte de abajo y le sumas tres"*.

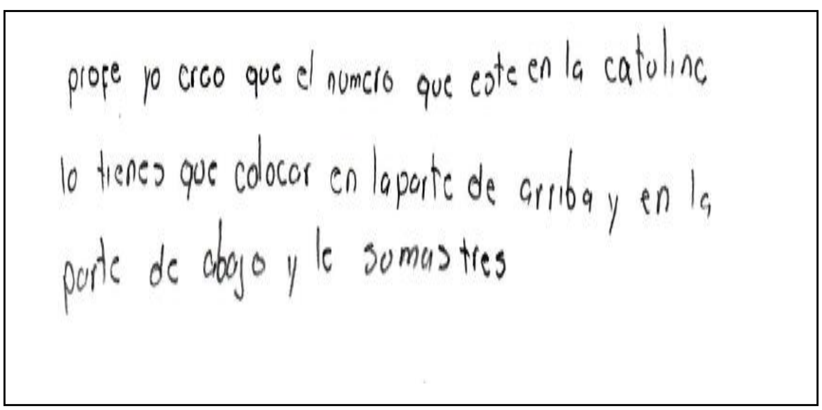

profe yo creo que el numero que este en la catulina lo tienes que colocar en laparte de arriba y en la parte de abajo y le sumas tres

Figura 52. Producción de Astrid sobre la Tarea 4, Problema del Mensaje

En el trabajo desarrollado en esta tarea podemos observar que el pensamiento algebraico Contextual es una posibilidad que los estudiantes instancian en la actividad. Para expresarlo de otra manera, *la actividad hace aparecer esta forma de pensamiento algebraico como* *una evolución del pensamiento algebraico Factual*. Este resultado es importante, pues el Problema del Mensaje hace posible nombrar finalmente lo indeterminado y operar con él, es decir, estamos frente a una indeterminancia analítica o algebraica.

Desde la caracterización de generalización algebraica de patrones propuesta por Radford (2013b), podemos señalar que a esta altura del trabajo los estudiantes han identificado la comunalidad o característica común que ha sido extraída del trabajo sensible sobre las figuras 1 a 3, desde la Tarea 2 (característica que conlleva a notar que, una vez separada la torre, a lo que multiplica debe sumarle 3). La abducción o generalización de esta característica o propiedad común ha sido traducida (implícitamente) en hipótesis y ésta es usada para determinar una expresión o fórmula que permite infaliblemente calcular directamente cualquier término de la secuencia. Observemos cómo el contenido del Problema del Mensaje posibilita designar la indeterminancia, volverla objeto de discurso, por ejemplo, cuando afirman $\#figurax2+3$ (Otras instanciaciones: *"a la figura le sumo el mismo número de la figura y al resultado que me dé le sumo 3", "el número que te entregaron tienes que multiplicarlo por 2 y el número que te dio le sumas 3", "sumar el número que le salga en la tarjeta dos veces y le suma más tres"*). Aquí hay evidencia de una analiticidad *GA*. Hay evidencia también de un carácter operatorio de lo indeterminado, es decir, hay analiticidad *PA*.

Si aceptamos esto, parece ser que el pensamiento algebraico, desde la caracterización sugerida por Radford (2010b) (indeterminancia, analiticidad y expresión semiótica), engloba la generalización algebraica de patrones también caracterizada por este autor (Radford, 2013b). En este caso, se da la generalización algebraica y la analiticidad (*GA*) involucrada propulsa la analiticidad *PA,* instanciando una forma de pensamiento algebraico Contextual, pues la indeterminancia es analítica.

Desde nuestra perspectiva de la epistemología hegeliana, los alumnos están enactivando una forma de razonamiento y de acción que ha quedado codificada en la cultura. Aún más, en el movimiento con el que es propulsado el pensamiento algebraico Contextual (saber) por la actividad ocurren las instanciaciones, que son singulares hegelianos en movimiento ellos mismos. Los estudiantes transformaron las expresiones semióticas basadas en operaciones concretas, en números, en expresiones generales como el *"numero que está en la cartulina",* expresión que denota o nomina lo indeterminado.

En la Tabla 1 presentamos una rejilla que muestra las expresiones semióticas de las indeterminancias y sus respectivos caracteres operatorios de las producciones de los estudiantes Jimmy Stiven, Luis Felipe, Yaneth, Sunner y Astrid, como casos que consideramos representativos. Nos parece importante visibilizar estas producciones o instanciaciones del pensamiento algebraico Contextual por cuanto ponen en evidencia la potencia del Problema del Mensaje como recurso didáctico que hizo movilizar en los estudiantes esta forma de pensamiento. En la rejilla hemos puesto las sentencias o frases tal cual fueron elaboradas por los alumnos.

Estudiante	***Expresión semiótica de la indeterminancia***	***Analiticidad o carácter operatorio de la indeterminancia***
Jimmy Stiven	*"el numero que esta dentro de la tarjeta"*	*"debes coger ese numero y multiplicarlo por dos y ese resultado que te de debes colocarle esta torre ejm* 
Luis Felipe	*"figura"*	*"a la figura le sumo el mismo número de la figura y al resultado que me dé, le sumo 3"*
Yaneth	*"el numero que le salga en la tarjeta"*	*"sumar el número que le salga en la tarjeta dos beses y le suma mas tres"*
Sunner	*"el numero que te entregaron"*	*"el numero que te entregaron tienes que multiplicarlo por 2 y el numero que te dio le sumas 3"*
Astrid	*"el numero que este en la cartulina"*	*"el numero que este en la cartulina lo tienes que colocar en la parte de arriba y en la parte de abajo y le sumas tres"*

Tabla1. Rejilla que presenta las expresiones semióticas de la indeterminancia y su respectiva analiticidad de varios estudiantes cuando abordan el Problema del Mensaje

El trabajo desarrollado por los estudiantes a esta altura de las sesiones evidencia una reducción de recursos semióticos y a la vez una concentración del significado en relación con las secuencias. Como un caso representativo destacamos el trabajo de Luis Felipe, quien a lo largo de las sesiones ha tomado una mayor conciencia sobre las características de las secuencias, las maneras de construirlas, la forma como ha identificado la comunalidad, su abducción y luego hipótesis, entre otras. En materia de desarrollo, podemos apreciar la evolución de la unidad de componentes materiales e ideacionales del pensamiento algebraico, pues es en la materialidad de la actividad en donde Luis Felipe toma conciencia de una forma de pensamiento algebraico (en este caso Contextual). Esta materialidad se hace evidente, por ejemplo, a través de sus determinaciones sensibles (Radford, 2013b). Aún más, es a través de la actividad material que el Ideal (es decir, una forma de pensamiento algebraico Contextual) puede *aparecer* y volverse objeto de conciencia en Luis Felipe.

Estudiante	***Producción Tarea 1***	***Producción Tarea 2***	***Producción Tarea 3***	***Producción Tarea 4***
Luis Felipe	*"Que si ponemos 3 círculos abajo [con el dedo índice hace círculos hacia la izquierda] arriba encima del medio tenemos que poner 2"*	*"al mil le sumo otros mil y el resultado que da le sumo tres"*	*"a el 100 le sumo otros 100 y el resultado que nos da le resto 1 y a ese resultado le sumo 100"*	*"a la figura le sumo el mismo número de la figura y al resultado que me dé, le sumo 3"*

Tabla 2. Proceso de objetivación contracción semiótica de Luis Felipe

En la Tarea 1 Luis Felipe tiene la necesidad de movilizar gestos indexicales espaciales para referirse a la construcción de la secuencia y a la manera como identifica la comunalidad. Si bien la secuencia de la Tarea 2 es distinta, nos interesa resaltar aquí que la coordinación de componentes externas de su pensamiento gana en refinamiento en comparación con su actividad semiótica sobre la Tarea 1. La producción con respecto a la Tarea 3 no presenta diferencias importantes comparadas con las de la Tarea 2, sin embargo su producción con respecto a la Tarea 4 es significativa.

Se evidencia un avance importante en su actividad semiótica. Esto resulta en una vinculación más refinada de los recursos semióticos y en consecuencia un nivel más profundo de conciencia y de inteligibilidad del problema en cuestión. En síntesis, Luis Felipe ha desarrollado un proceso de contracción semiótica, esto es, un proceso genético o de desarrollo conceptual. En este proceso, él concentra el significado y al mismo tiempo, al parecer, los medios semióticos de objetivación movilizados anteriormente se subsumen en una frase como *"a la figura le sumo el mismo número de la figura y al resultado que me dé, le sumo 3"*.

4.3.5 Tarea 5: Secuencia puramente numérica. La secuencia que propusimos en esta tarea no contaba con el apoyo tabular. Tal y como lo señalamos en el diseño de la investigación, queríamos indagar por los medios semióticos de objetivación que pudieran movilizar los estudiantes al no contar con elementos geométrico-espaciales. Propusimos la siguiente secuencia que se genera a partir del término general $2n + 3$, con $n = 1,2,3, \ldots$

5	***7***	***9***	***11***

Figura 53. Secuencia puramente numérica presentada en la Tarea 5

En la parte inicial del trabajo los estudiantes en forma individual abordaron la secuencia y luego discutieron en pequeños grupos. La profesora Johanna circula por algunos grupos para revisar lo que contestaron a los ítems 1 y 2. En uno de estos grupos (conformado por Lorena, Luis Felipe, Adriana, Sunner y Santiago) interviene preguntándoles cómo les había ido con el trabajo.

L1. Profesora Johanna: ¿Cómo nos fue?, ¿listo? entonces vamos a mirar para las preguntas 1 y 2, listo entonces en la pregunta número 1 ¿cuál considera usted que es el primer término de la secuencia anterior?, entonces ¿quién me dice qué escribió (…)? tú sí (…) a ver Lorena ¿qué escribiste?, para ti ¿cuál es el primer término de la secuencia?

L2. Lorena: El 5.

L3. Profesora Johanna: El 5.

Los niños en su mayoría contestan que el primer término de la secuencia es 5, excepto uno que dice que el primer término de la secuencia es 3, mientras que otros estudiantes no dicen nada.

L4. Profesora Johanna: ¿Para ti?

L5. Luis Felipe: El 3.

L6. Profesora Johanna: El 3, entonces bueno acá tenemos dos respuestas, entonces vamos a escuchar primero a Lorena, Lorena, ¿por qué es el 5 para ti?

L7. Lorena: (…) [*Lorena no responde y mira a una de sus compañeras*].

L8. Profesora Johanna: ¿No sabes cuál es el primer término?

L9. Lorena: (…) [*hace una negación con la cabeza*].

L10. Profesora Johanna**:** Adriana, ¿por qué es el primer número para ti?

L11. Adriana: Porque es el más bajo.

L12. Profesora Johanna: Adriana dice que este es [*señala el número 5 en el tablero*] el primer término porque es el más bajo (…) ¿el más bajo?, ¿cómo así?

L13. Sunner: Porque el 5 es menor que los demás.

L14. Profesora Johanna: Porque el 5 es menor que los demás (…) ahora escuchemos a Luis, vamos a ponerle cuidado a la respuesta de Luis ¿listo? (…) Luis (…) ¿por qué dices que es el 3?

L15. Luis Felipe: Por ejemplo si 5 es el segundo ¿no?, esta figura ya le da a uno la secuencia ¿no?

En esta parte del diálogo se observan dos respuestas al ítem 1 de esta tarea. La primera refiere a que 5 es el primer término de la secuencia planteada porque 5 es el número menor (L11, L13). En este caso, para Sunner, por ejemplo, la idea de primer término parece estar asociada a secuencias crecientes en las que siempre hay un primer término que es el menor. Por otra parte, aparece otra respuesta (L5) que lleva implícita el cambio de la secuencia, pues para Luis Felipe el primer término no es 5, sino 3, tal y como se aprecia en la Figura 54.

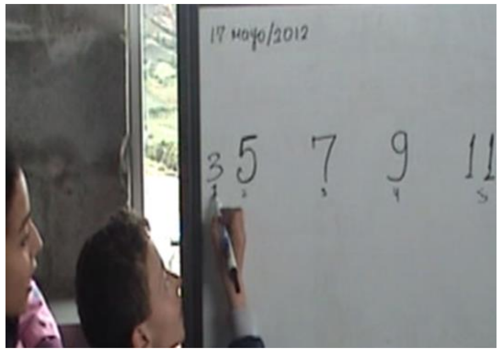


Figura 54. Luis Felipe escribiendo el primer Término de la secuencia que él propone

L16. Profesora Johanna: Bueno pero ¿qué ven?, un segundito acá [*dirigiéndose al tablero*] voltéate un segundito para que todos te puedan escuchar, miren lo que dice Luis (…) Luis dice que si el 5 (…) ¿tú dices que el 5 es el segundo término?

L17. Luis Felipe: [A*firma con la cabeza*].

L18. Profesora Johanna: ¿Por qué?

L19. Luis Felipe: Porque al 2 le sumo otros 2 y le resto 1y le sumo otra vez 2.

L20. Profesora Johanna: Y ¿por qué dices (…)? y ¿dónde ves tú el 2 en la secuencia?

L21. Luis Felipe: Debería ir acá [*señala debajo del 5 en el tablero, como indicando la posición o el número del término*].

L22. Profesora Johanna: ¿Dónde debe ir el 2?

L23. Luis Felipe: Ah aquí [*pone el dos debajo del 5*].

L24. Profesora Johanna: Y entonces, ¿dónde iría el 3?

L25. Luis Felipe: Ah aquí [*lo pone debajo del 7*].

L26. Profesora Johanna: Y entonces en los otros dos ¿qué? [*refiriéndose al 9 y al 11*].

L27. Luis Felipe: [*Pone el 4 debajo del 9 y el 5 debajo del 11*].

L28. Profesora Johanna: Bueno (…) entonces mira la pregunta para Luis y es para ustedes listo, ¿por qué este?… ¿por qué para Luis? (...) bueno (…) ¿por qué para Luis este es el segundo término y no el primero? ¿Entonces dónde estaría el primero?

L29. Luis Felipe: [*Luis pone el 3 antes del 5*].

Efectivamente Luis Felipe cambia la secuencia. No está considerando la presentada en el tablero, sino que para él la secuencia es: ***3 5 7 9 11***, en la cual su primer término es

3. Si bien no tiene dificultades para identificar la comunalidad (“*porque al 2 le sumo otros 2 y le resto 1y le sumo otra vez 2”*), la secuencia que propone es otra.

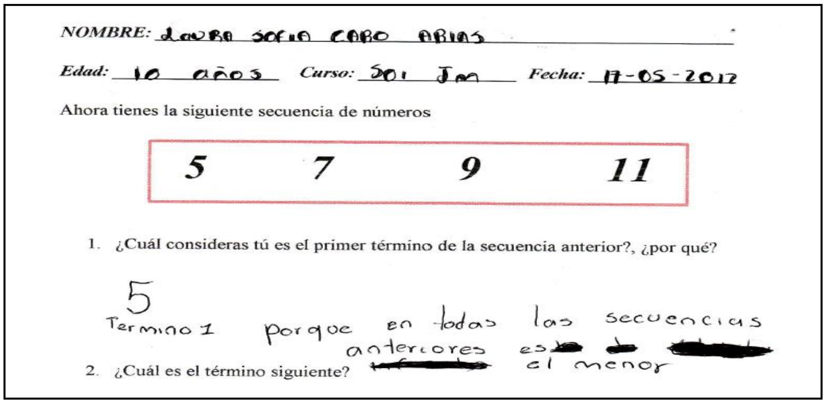
L30. Profesora Johanna: Y sería ¿3?, ¿y no puede ser éste el primero? [s*eñala el 5*].
L31. Luis Felipe: No profe.
L32. Profesora Johanna: Pero ¿por qué (…) ¿por qué no?, Esneider ¿por qué?
L33. Esneider: No (…) yo no (…).
L34. Profesora Johanna: Bueno lo que ocurre es que aquí hay una cosa.
L35. Santiago: Yo, yo, yo.
L36. Profesora Johanna: A ver Santiago, cuéntame.
L37. Santiago: El primer término no es ni, no es el, ese es el tercero, 5 es el tercero.
L38. Profesora Johanna: ¿5 es el tercero?, y entonces ¿cuál es el primero?
L39. Santiago: El primer término es 1, ahí se van sumando de a 2 (…) al 1 se le suman 2 da 3, se le vuelven a sumar 2 da 5, el primer término es 1.
L40. Profesora Johanna: Bueno miren acá lo que estamos diciendo, listo [*ella se encuentra justo frente al tablero*] lo que ocurre es lo siguiente, entonces miren; te puedes sentar [*le dice a Luis Felipe*] esta es la secuencia que yo les di: ***5 7 9 11*** listo voy a borrar estos numeritos [*borra lo que puso Luis*] ésta es la secuencia que yo les di: ***5 7 9 11*** [*señalando al tablero*] la secuencia de la que está hablando Luis es: ***3 5 7 9*** [*la anota en el tablero*] y la secuencia de la que está hablando Santiago ***1 3 5 7*** [*la anota en el tablero*] ¿qué pasa con estas secuencias?, miren (…) si ustedes miran esas secuencias, por ejemplo para obtener el 7 yo podría construir el 7 a partir del 5 [*señala el 7 en el tablero*] ¿haciendo qué?
L41. Estudiantes en coro: Sumándoles 2!
L42. Profesora Johanna: Puedo construir el 9 a partir del 7.
L43. Estudiantes en coro: Sumando 2!
L44. Profesora Johanna: En esta secuencia [*señala la secuencia de Luis*] puedo construir el 5 a partir del 3.
L45. Estudiantes en coro: Sumando 2 [*Santiago contesta primero*].
L46. Profesora Johanna: Y el 7 a partir del 5 listo y miren en esta tercera secuencia pasa lo mismo[*señalando la secuencia de Santiago*], entonces las tres secuencias se pueden

construir sumando 2 ¿verdad?, pero tienen una diferencia y es el primer término entonces miren (…) el primer término de esta secuencia [*señala la secuencia de Santiago*] para Santiago es el 1, el primer término de esta secuencia [*señala la secuencia de Luis*] para Luis es el 3 y el primer término de esta secuencia [*señala la secuencia original que estaba en la guía*] para ustedes es el 5 listo entonces.

Figura 55. La profesora Johanna explica las diferencias de las tres secuencias propuestas

En la discusión con el grupo general, la profesora Johanna intenta visibilizar las diferencias de las tres secuencias (Figura 55), focalizando la atención en el hecho que las tres tienen un primer término distinto, aunque el patrón que las genera es el mismo (aumenta en 2). La secuencia propuesta por Santiago, al parecer, tiene su origen en el universo de los números naturales, el cual ha venido siendo trabajado por los estudiantes en la clase de matemáticas. Por su parte, en la secuencia que propone Luis Felipe (***3 5 7 9***), el segundo término es el *5* y no el *7*, pues para él el primer término debe ser *3*.

Algunas producciones en las hojas de trabajo dejan ver las razones por las cuales ***5*** es el primer término de la secuencia propuesta. Efectivamente para estos estudiantes el primer término siempre es el menor. La repuesta de Laura Sofía, afirmamos, reside en su experiencia cultural vivida en las sesiones anteriores. Ella afirma que el 5 es el primer término porque *"en todas las secuencias anteriores es* (el primer término) *el menor"*.



NOMBRE: Laura Sofia Caro Arias

Edad: 10 años Curso: 501 JM Fecha: 17-05-2017

Ahora tienes la siguiente secuencia de números

5 7 9 11

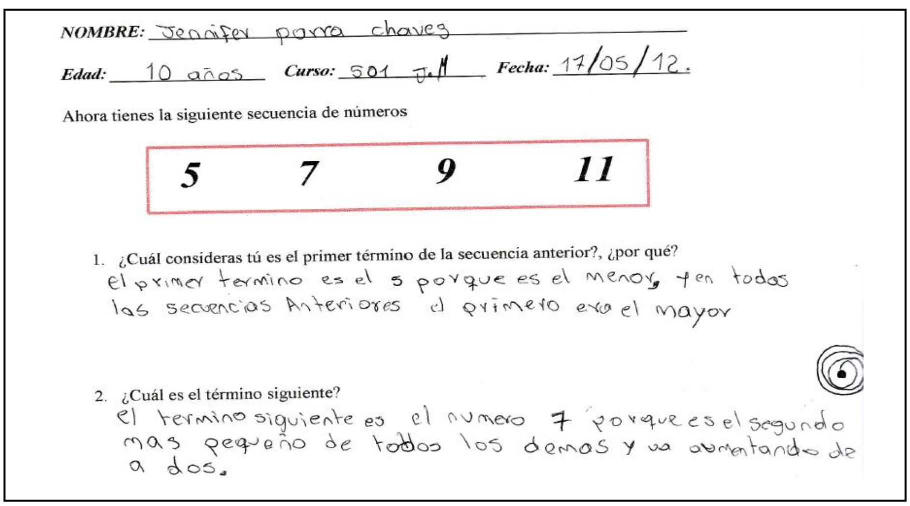
1. ¿Cuál consideras tú es el primer término de la secuencia anterior?, ¿por qué?

5
Termino 1 porque en todas las secuencias anteriores es el menor

2. ¿Cuál es el término siguiente?

Figura 56. Respuesta de Laura Sofía a los ítems 1 y 2 de la Tarea 5

Efectivamente, las tareas que se diseñaron en esta investigación siempre involucraron secuencias crecientes en las cuales, desde luego, el primer término es el menor de todos. Esta experiencia cultural deja huella en Laura Sofía y la razón esgrimida por ella paga tributo al trabajo sobre el tipo de secuencias abordadas. Por su parte, Jennifer reafirma lo expresado por Laura Sofía, aunque al escribirlo se equivoca.



NOMBRE: Jennifer parra chaves

Edad: 10 años Curso: 501 J.M Fecha: 17/05/12.

Ahora tienes la siguiente secuencia de números

5 7 9 11

1. ¿Cuál consideras tú es el primer término de la secuencia anterior?, ¿por qué?

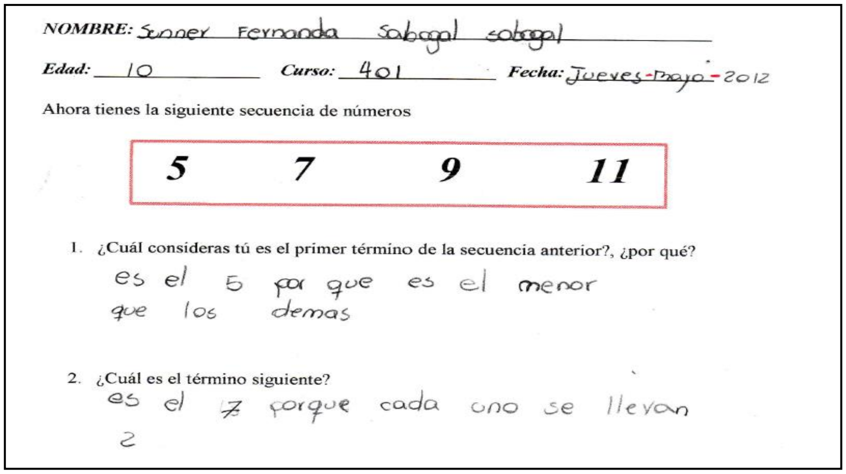
el primer termino es el 5 porque es el menor, y en todas las secuencias Anteriores el primero era el mayor

2. ¿Cuál es el término siguiente?

el termino siguiente es el numero 7 porque es el segundo mas pequeño de todos los demas y va aumentando de a dos.

Figura 57. Respuesta de Jennifer a los ítems 1 y 2 de la Tarea 5

Sunner también reafirma lo expresado por Jennifer y Laura Sofía. Ella ha identificado la comunalidad, evidenciada en su respuesta a l ítem 2: *"es el 7 porque cada uno se llevan 2"*,



NOMBRE: Sunner Fernanda Sabogal sabogal

Edad: 10 Curso: 401 Fecha: Jueves-Mayo-2012

Ahora tienes la siguiente secuencia de números

5 7 9 11

1. ¿Cuál consideras tú es el primer término de la secuencia anterior?, ¿por qué?

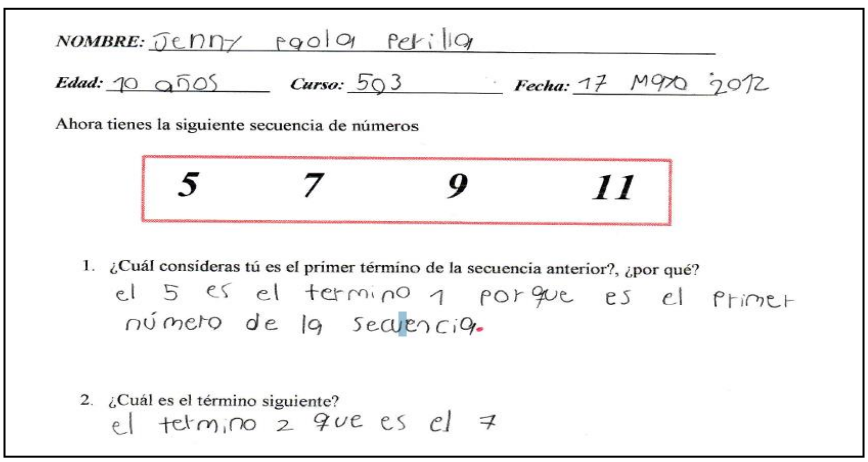
es el 5 por que es el menor que los demas

2. ¿Cuál es el término siguiente?

es el 7 porque cada uno se llevan 2

Figura 58. Respuesta de Sunner a los ítems 1 y 2 de la Tarea 5

La producción de Jenny en relación con el ítem 1, en la Figura 59, parece coincidir con las respuestas anteriores, sin embargo su declaración, **“***el 5 es el termino 1 porque es el primer número de la secuencia”,* sugiere una práctica cultural de leer de izquierda a derecha.



NOMBRE: Jenny paola perilla

Edad: 10 años Curso: 503 Fecha: 17 Mayo 2012

Ahora tienes la siguiente secuencia de números

5 7 9 11

1. ¿Cuál consideras tú es el primer término de la secuencia anterior?, ¿por qué?

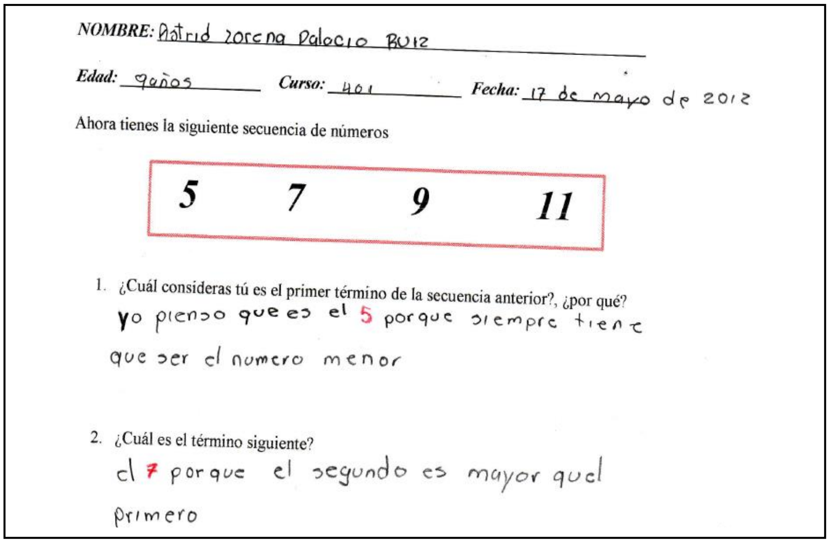
el 5 es el termino 1 porque es el primer número de la secuencia

2. ¿Cuál es el término siguiente?

el termino 2 que es el 7

Figura 59. Respuesta de Jenny a los ítems 1 y 2 de la Tarea 5

En la respuesta ofrecida por Astrid al ítem 1: *“yo pienso que es el 5 porque tiene que ser el número menor”,* es interesante ver cómo la palabra *“tiene”* adquiere un sentido de obligatoriedad, debido posiblemente a la historia cultural de las sesiones de trabajo o más específicamente, debido a la actividad desarrollada (en tanto evento) en las sesiones anteriores.



NOMBRE: Astrid Lorena Palacio Ruiz

Edad: 9 años Curso: 401 Fecha: 17 de mayo de 2012

Ahora tienes la siguiente secuencia de números

5 7 9 11

1. ¿Cuál consideras tú es el primer término de la secuencia anterior?, ¿por qué?

yo pienso que es el 5 porque siempre tiene que ser el numero menor

2. ¿Cuál es el término siguiente?

el 7 porque el segundo es mayor quel primero

Figura 60. Respuesta de Astrid a los ítems 1 y 2 de la Tarea 5

En este caso en particular, observemos que su respuesta al ítem 2, *"el 7 porque el segundo es mayor que el primero"*, parece denotar la idea de secuencia creciente. Una vez más, esto puede estar relacionado con el tipo de actividad desplegada por Astrid en sesiones anteriores. Como lo sugiere Ilyenkov (1977), el conocimiento logrado arrastra la huella de la actividad que lo media, es decir, el conocimiento o las instanciaciones de Astrid sobre la idea general de secuencia pagan tributo a la actividad. Interpretamos esta actividad como el Particular de Hegel, conformado por el diseño de las tareas y la actividad en tanto evento (Radford, 2013a).

Aunque en estos momentos podríamos aventurarnos a afirmar que, independientemente de las respuestas de los estudiantes, la mirada de las secuencias paga su tributo a una forma cultural de lectura (de izquierda a derecha), en el análisis de las producciones de los estudiantes frente a la Tarea 6 presentaremos evidencias de que es más fuerte, quizás, la idea según la cual para los estudiantes el primer término de una secuencia siempre es el número menor y no necesariamente el primero que se ubica a la izquierda.

Finalmente, la profesora Johanna a través de un trabajo conjunto lleva a los alumnos a tomar conciencia de la estructura numérica de la secuencia y deciden adoptar la representación tabular en la secuencia:

5	7	9	11
Término 1	*Término2*	*Término 3*	*Término 4*

Figura 61. Secuencia final acordada en el grupo de estudiantes y la profesora Johanna con apoyo tabular

El siguiente diálogo corresponde a una parte de una entrevista focalizada, en la cual pretendíamos indagar más de cerca lo que los estudiantes percibían sobre este tipo de secuencias.

L47. Profesor Rodolfo: Bueno, ¿cómo es la cosa? Dice Luis, ¿por qué no repites, Luis, lo que habías dicho?

L48. Luis Felipe: Que por ejemplo en el 7 [*el número correspondiente al Término 2*] se multiplica, el 2 multiplicado por el 3, y le sumo 1, pero acá en el término 3 no sirve, porque el 3 lo multiplico por 3 y le sumo 1 daría 10, pero entonces no serviría [*señala en el cuaderno de notas del investigador (Rodolfo) la segunda y la tercera posición de la secuencia de la Figura 62*].

L49. Profesor Rodolfo: No serviría ni para el Término 1, ni para el Término 3 ni para el Término 4. ¿Qué es lo que tú sugieres Santiago?

L50. Santiago: Que se le sumen, se le suman 3, se le pone 1 al término y los otros 2 se le ponen el número [*señala la palabra Término 1, que está escrita en la parte inferior del número 5, y luego señala el número 5 que está escrito en la parte superior*] y ahí van dando todos.

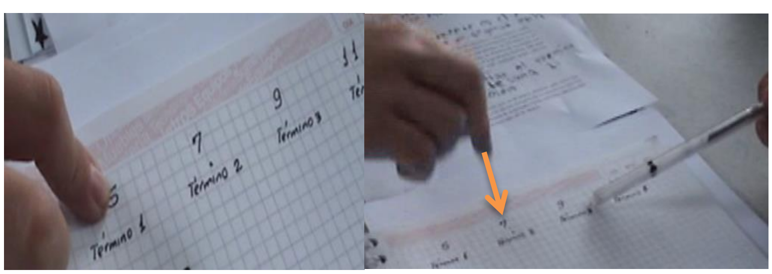


Figura 62. Secuencia de señalamiento de Santiago en la secuencia numérica con recurso tabular. A la izquierda señala el número 5 correspondiente al término 1; a la derecha señala el número 7 correspondiente al Término 2. Reconstrucción del video

L51. Profesor Rodolfo: ¿Qué es lo que se le pone al término?

L52. Santiago: Al término se le va poniendo 1, de a 1, y a los números se le van poniendo los otros 2.

L53. Profesor Rodolfo: Pero, pero tú tienes que producir son los números, tú tienes que trabajar es con los términos, pero (…).

L54. Santiago: Pero como usted dice que tiene que dar con éste y con éste [*señala los dos primeros números ubicados en la parte superior, 5 y 7*] tendría que sumársele 2 y al término dársele 1 y al resto a los (…) a los otros números.

La Figura 62 muestra dos señalamientos que hace Santiago para referirse a la manera como se van formando los términos de la secuencia. La movilización de este tipo de gestos es acompañada de palabras y de actividad perceptual. La actividad de Santiago se concentra en las relaciones entre los términos (L52) y los números correspondientes a estos términos (L54). El movimiento de sus dedos se limita a señalarlos o a apuntarlos. Santiago pone en juego una abducción ("*a los números se le van poniendo los otros 2*") que confirma cuando declara en L50 *"y ahí van dando todos",* lo cual simplemente le permite pasar de un número a otro. En este caso no hay evidencia de deducción de una fórmula que permita encontrar el número correspondiente a un término en particular o cualquier término. En este sentido, Santiago efectúa una generalización aritmética (Radford, 2013b).

Observemos cómo en la línea L48, Luis Felipe pone en funcionamiento una estrategia de ensayo-error, "*Que por ejemplo en el 7 [el número correspondiente al Término 2] se multiplica, el 2 multiplicado por el 3, y le sumo 1, pero acá en el término 3 no sirve, porque el 3 lo multiplico por 3 y le sumo 1 daría 10, pero entonces no serviría*". Se evidencia un ejercicio de adivinar la regla, la cual le funciona para el Término 2 pero no para el Término 3. La abducción aquí no resulta de inferir una comunalidad acerca de los tres primeros términos de la secuencia. La abducción es mera adivinanza. Luis Felipe realiza una inducción ingenua (Radford, 2008b).

Queremos destacar una vez más cómo las estructuras numérica y espacial fueron importantes en las Tareas 1, 2 y 4, en tanto fueron proveedoras de índices o elementos perceptivos generalizables que posibilitaron el establecimiento de relaciones entre números conocidos y desconocidos. En este sentido el trabajo algebraico que puede abordarse en el terreno fenomenológico tiene sus bases en la articulación de estas dos estructuras. En particular, el contenido del Problema del Mensaje junto con sus estructuras espacial y numérica que comporta la secuencia presentada en él sirvió de punto de referencia para efectuar la generalización algebraica (en ese caso Contextual). Observemos que aun cuando se abordó el Problema del Mensaje y produjo una evolución de la forma de pensamiento algebraico, al trabajar posteriormente con la Tarea 5 (Secuencia puramente numérica), se regresa de nuevo a producciones por parte de los estudiantes que evidencian generalizaciones aritméticas y más aún, emergen estrategias de ensayo-error que terminan en meras adivinanzas o inducciones ingenuas.

4.3.6 Tarea 6: Secuencia puramente figural. En relación con esta tarea ya había un antecedente con la Tarea 5 en la que los estudiantes y la profesora Johanna discutieron sobre cuál era el primero y segundo términos de esa secuencia (secuencia puramente numérica). Esta experiencia ganada fue puesta en marcha al abordar esta tarea (cuyo término general es $2n + 1$, con $n = 1,2,3, \ldots$) por lo que no se presentaron dificultades en relación con establecer cuál era la primera figura, cuál la segunda, cuál sería la tercera y cuál la cuarta figura. Una vez establecieron el apoyo tabular, el trabajo se concentró en discutir los otros ítems.

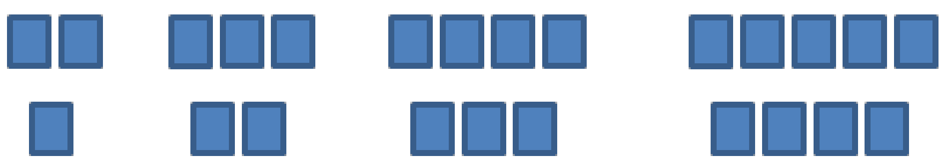


Figura 63. Secuencia propuesta en la Tarea 6

En términos generales, las producciones de los estudiantes en relación con los ítems de esta tarea tienen similares características que las producciones logradas en las tareas 1 (Secuencia figural apoyada por representación tabular (1)), 2 (secuencia figural apoyada por representación tabular (2)) y 4 (Problema del Mensaje). Nuevamente podemos señalar que la forma de pensamiento Contextual aparece aquí como posibilidad que los estudiantes instancian a través de la movilización de medios semióticos de objetivación.

El Particular de Hegel, estructurado por el diseño de las preguntas y exigencias que hacemos y la actividad propiamente como se desarrolla (evento), hace aparecer el pensamiento algebraico Contextual como una evolución del pensamiento algebraico Factual. Consideramos este hecho como un resultado importante de nuestra investigación, lo cual pone de manifiesto la idea de saber como movimiento en una especie de continuidad entre estos tipos o formas de pensamiento algebraico.

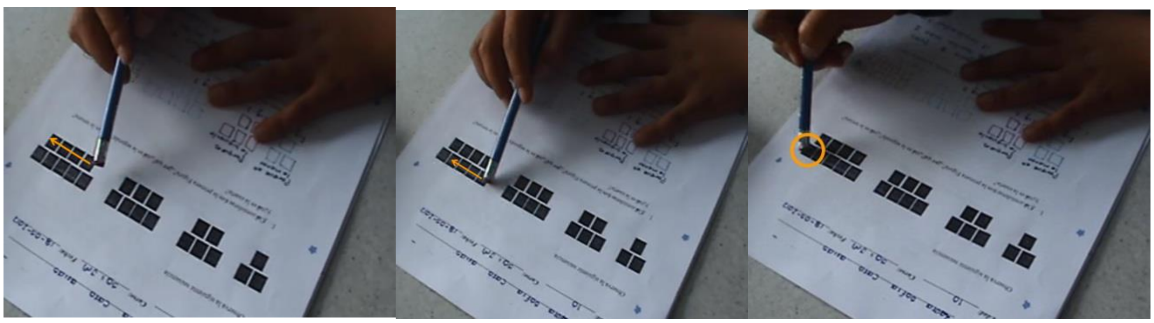


Figura 64. Secuencia de gestos (deslizamientos del lápiz) movilizados por Laura Sofía, ítem 1 Tarea 6. Reconstrucción del video

Presentamos como caso representativo el siguiente diálogo en donde intervienen el profesor Rodolfo, Laura Sofía y Jenny, discutiendo sobre la construcción de la secuencia. La Figura 64 muestra una serie de gestos (deslizamientos del lápiz) los cuales son puestos en funcionamiento por parte de Laura Sofía cuando comunica la forma como se generan las figuras.

L1. Laura Sofía: Por ejemplo en la figura 4, pones 4 abajo y 4 arriba [*señala la hilera inferior de rectángulos y después la de arriba*] más 1 [*señala el último rectángulo de la hilera superior*].

L2. Profesor Rodolfo: ¿Y por ejemplo, como sería la figura 5?

L3. Laura Sofía: 5 abajo y 5 arriba [*mientras señala las hileras*] más 1.

L4. Profesor Rodolfo: ¿Y la figura 6?

L5. Laura Sofía: 6 abajo y 6 arriba, más 1.

L6. Profesor Rodolfo: ¿Cómo será, por ejemplo, Jenny, en la figura 15?
L7. Jenny: 15 abajo y 15 arriba [*sube la mano ligeramente*] y le sumamos 1, serían 15 abajo y 16 arriba.

En relación con el ítem 5 de esta tarea, la producción de Jenny evidencia un sentido de la indeterminancia tratada analíticamente.
L8. Profesor Rodolfo: Ahora, el quinto punto ¿cómo lo resolviste tú Laura Sofía? Ábrelo para que lo vean.
L9. Laura Sofía: [*Laura lee de su guía*] profe Estella, coges el número que está en la tarjeta y lo sumas por el mismo más 1.

En este caso, la indeterminancia está determinada en la frase *"el número que está en la tarjeta"*. El carácter operatorio de esta indeterminancia o analiticidad viene dado por la frase: *"coges el número que está en la tarjeta y lo sumas por el mismo más 1"*. La producción de Jenny, por su parte, evidencia también la movilización de gestos indexicales los cuales comunican la forma como se genera, para ella, la secuencia.

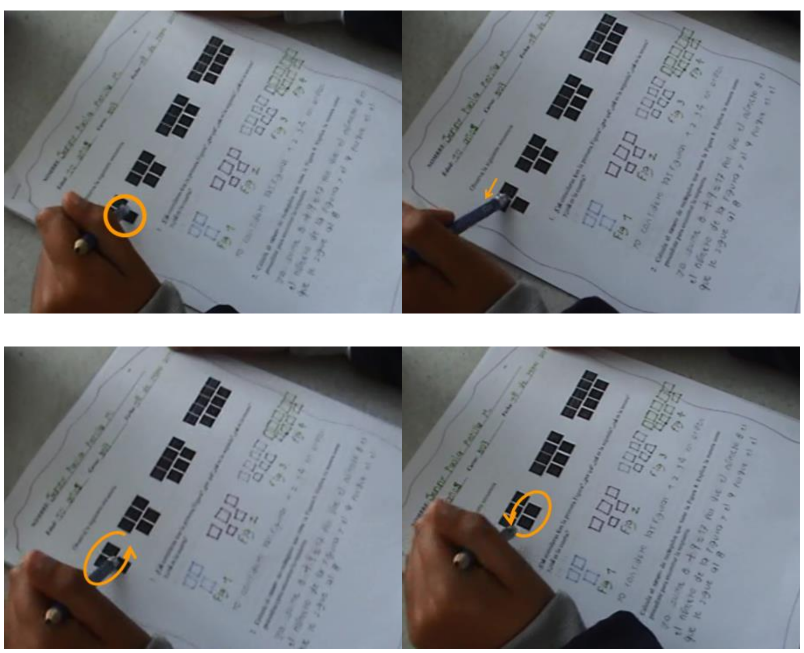


Figura 65. Secuencia de gestos indexicales por parte de Jenny al explicar la manera como se generan las figuras en la secuencia de la Tarea 6. Reconstrucción del video

L10. Jenny: La figura 1 [*la señala con el lápiz*] uno le coloca un cuadrado acá arriba [*señala el cuadrado inferior*] y como es el siguiente del 1, es el 2, entonces lo ponemos acá arriba [*señala la hilera superior de la figura*]. El 2 [*señala estos últimos dos cuadrados*], estos dos cuadrados los ponemos acá abajo [*señala la hilera inferior de la figura 2*] y el siguiente del 2 es 3 [*señala la hilera superior de la figura 2*] y cogemos así sucesivamente hasta los otros.

Se observa que la movilización de gestos indexicales (espaciales y temporales), palabras, actividad perceptual y movimiento parece ser más intenso cuando los estudiantes enfrentan secuencias que ofrecen índices geométrico-espaciales en contraste con las secuencias numéricas (con o sin apoyo tabular). Es más, cuando los estudiantes abordaron la secuencia puramente figural, en la cual luego establecieron rápidamente el recurso tabular a partir de su experiencia ganada en la tarea anterior, al menos se observa en ellos una disposición favorable para trabajar con este tipo de secuencias. En efecto, ellos pueden decir frases como: ”*como es el siguiente del 1*”, *“uno le coloca un cuadrado acá arriba”*, *“estos dos cuadrados los ponemos acá abajo”*, *“cogemos así sucesivamente hasta los otros”*; frases que ponen de manifiesto indexicales espaciales (por ejemplo, *el siguiente de 1, acá arriba, acá abajo*) y un indexical temporal (*así sucesivamente*).

En relación con este último aspecto, observamos, en el caso de Jenny: *“...y el siguiente del 2 es 3 y cogemos así sucesivamente hasta los otros",* cómo el lenguaje natural le sirve de apoyo para poder expresar a través de su fórmula corpórea cuestiones relacionadas con el tiempo (*así sucesivamente*), o quizás, más adelante, indagar cómo el lenguaje simbólico (podría ser una fórmula algebraica) incorpora la dimensión lingüística.

En el siguiente diálogo entre la profesora Johanna, Héctor Fabio, Adriana, el profesor Rodolfo y Yaneth, parece reafirmarse en los estudiantes la facilidad para abordar este tipo de secuencias:

L11. Profesora Johanna: ¿Tú la vez más fácil que la de los números?

L12. Héctor Fabio: ¡Claro! estamos mirándole observaciones [*se refiere a los índices geométrico-espaciales de las figuras*], y claro, es más fácil.

L13. Profesora Johanna: ¿Sí?, ¿le estás mirando observaciones, características, está más fácil?, con los números, ¿ya no puedo mirar características?

L14. Héctor Fabio: Pues eso es un poquito más difícil.

L15. Profesora Johanna: ¿Por qué te parece más fácil? [*dirigiéndose a Adriana*].

L16. Adriana: (…) [*Evidencia timidez*].

L17. Profesor Rodolfo: A Yaneth, ¿cómo le parece?, ¿más fácil o más difícil que el anterior?

L18. Yaneth: Me parece más fácil.

L19. Profesor Rodolfo: ¿Por qué?

L20. Yaneth: Porque en el anterior tocaba (…) adivinar el número, en vez de (…) [*se pone el lápiz en la boca, piensa en lo que va a decir*], no sé [*sonríe*].

L21. Profesor Rodolfo: Y con ésta [*refiriéndose a la secuencia puramente figural*] ¿qué es lo que sucede?

L22. Yaneth: (…) No sé (…) Es que todavía no la he (…).

L23. Adriana: Toca mirar cuál es la primera, la segunda [*señala con su dedo índice derecho las figuras 1 y 2*], la tercera y la cuarta.

Resaltamos en la declaración L20 de Yaneth la dificultad que ella manifiesta *"porque en el anterior tocaba (...) adivinar el número…"*, trabajo que efectivamente se desplegó en la actividad con la secuencia puramente numérica. Los estudiantes tenían que establecer relaciones entre los números pues no contaban con los elementos espaciales y geométricos. Observemos cómo Adriana, quien al principio mostró cierta timidez (L16), luego responde dirigiéndose a las figuras y señalando (L23).

En el análisis que adelantamos de las producciones de los estudiantes con respecto a la Tarea 5 (Secuencia puramente numérica), habíamos aventurado la afirmación según la cual la mirada y lectura que hacen los estudiantes de las secuencias pagaban su tributo a una forma cultural de lectura (de izquierda a derecha). Esta situación fue objeto de más análisis. En la siguiente entrevista focalizada queríamos explorar las razones que conminaban a nuestros estudiantes a significar el primer término de las secuencias numéricas y figurales en ausencia del recurso tabular. Las evidencias que presentamos en el caso de la secuencia puramente numérica mostraban que algunos estudiantes (Luis Felipe y Santiago, por ejemplo) proponían otra secuencia; por ejemplo para Luis Felipe la secuencia tenía como primer término al 3, mientras que para Santiago el primero era el 1.

Es interesante mostrar aquí que para los estudiantes en general el primer término de estas secuencias y de las anteriores siempre es el número menor y no necesariamente el primero que se ubica a la izquierda. En el cuaderno de notas del investigador, propusimos las secuencias que se muestran e indagamos con algunos estudiantes cuál consideraban era el primer término.

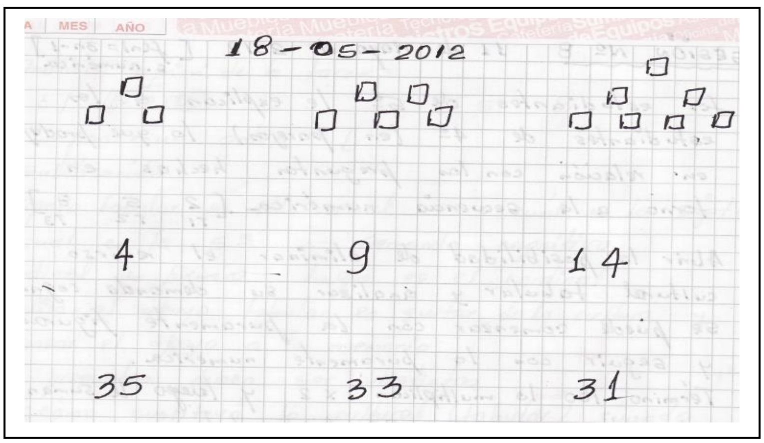


Figura 66. Secuencias propuestas por el investigador en una entrevista focalizada para indagar por el significado del primer término

En relación con la primera secuencia que se muestra, los estudiantes al unísono afirmaron que el primer término era el que se encuentra a la izquierda. En el caso de la secuencia puramente numérica ***4 9 14***, todos los estudiantes afirmaron que el primer término era el ***4***, mientras que para el caso de la secuencia puramente numérica ***35 33 31***, los estudiantes afirmaron que el primer término era el ***31***. Los estudiantes están considerando secuencias crecientes y tal vez ello sucede puesto que las tareas propuestas consideraron, todas, este tipo de secuencias.

4.3.7 Tarea 7: Problema del Mensaje al revés. Esta tarea pretendía explorar las formas como los estudiantes usaban la indeterminancia analítica o algebraica para producir los primeros cinco términos de una secuencia. La relación con la Tarea 4, el Problema del Mensaje, es dialéctica, en tanto en ésta los estudiantes tenían que nombrar la indeterminancia de manera analítica a partir del contenido del mensaje y en especial de la exigencia de comunicar a la profesora Estella la manera de calcular rápidamente el número de círculos de cualquier figura, y en la Tarea 7, dado un mensaje en el cual la indeterminancia algebraica estaba explícitamente dada, los estudiantes debían identificarla y usarla. Presentamos de nuevo la tarea:

En una sesión anterior, habíamos visto a la profesora Johanna que tenía una bolsa y dentro de ella introducía varias tarjetas, cada una con un número. Cada uno de estos números correspondía a una de las figuras de una secuencia dada. Ella sacaba al azar una tarjeta y la introducía en un sobre, asegurándose de que ningún estudiante hubiera visto el número de la tarjeta. La solicitud de Johanna era que el sobre fuera enviado a la profesora Estella con un mensaje que era introducido en el sobre junto con la tarjeta que contenía el número. Recuerda que este mensaje debía explicar a la profesora Estella cómo calcular rápidamente el número de círculos que correspondía al número de la tarjeta.
Un alumno escribió el siguiente mensaje:
"Profe Estella, para saber el número de círculos tú debes coger el número que está en el sobre y sumarle el mismo número y al resultado que te dio le sumas 1, y el resultado que te dio corresponde al número de círculos de esa figura".
A partir del mensaje anterior, construye los cinco primeros términos de la secuencia.

Yaneth ha construido su secuencia, pero no coincide con el mensaje que se plantea, pues el primer término de la secuencia elaborada por ella es un círculo. La profesora Johanna dialoga con Yaneth en aras de revisar la manera cómo ha construido su propuesta.

L1. Profesora Johanna**:** Entonces por eso es la relación, ah bueno, pero entonces vamos a mirar [*Señala la hoja*] entonces mira, tú dices listo, figura 1, ¡figura 2! ¿Por qué hay 3?

L2. Yaneth: Porque acá se hacen ehmm dos figuras, dos círculos y este número se pasa, este círculo se pasa pa' acá [*señala la hoja*] y se ponen en 3 [*explica con las manos*].

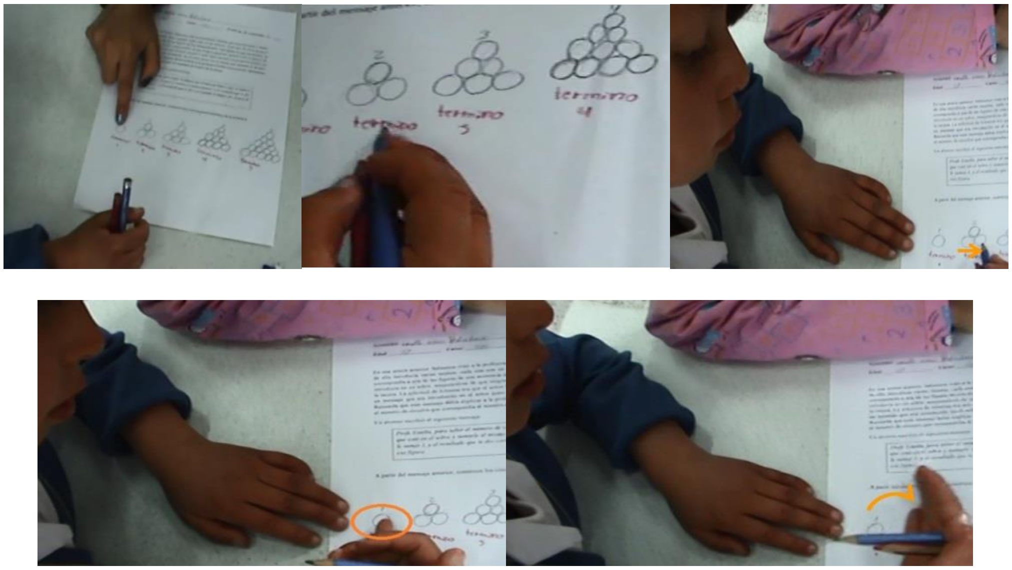


Figura 67. Secuencia de señalamientos y deícticos espaciales acompañada de palabras de Yaneth en interacción con la profesora Johanna. Reconstrucción del video

L3. Profesora Johanna: Ok y acá, figura 3[*Señala la hoja*].

L4. Yaneth: Ehmm acá se ponen tres círculos y estos tres que están acá [*Señala los círculos que conforman el segundo término*] se ponen encima.

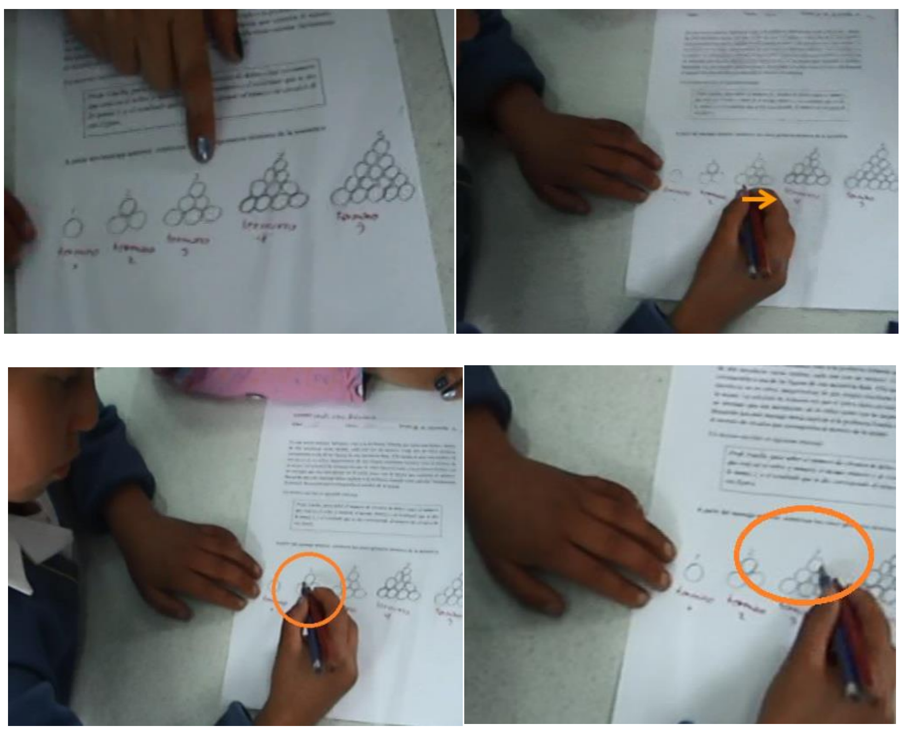


Figura 68. Una segunda secuencia de señalamientos y deícticos espaciales acompañada de palabras de Yaneth en interacción con la profesora Johanna. Reconstrucción del video

L5. Profesora Johanna: Figura 4.

L6. Yaneth: Ehh acá se ponen 4 círculos y estos 6 se ponen acá encima [*Señala la hoja*].

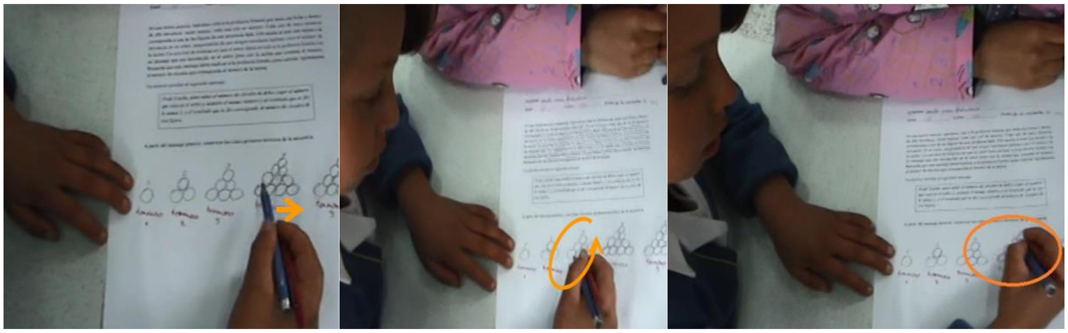


Figura 69. Una tercera secuencia de señalamientos y deícticos espaciales acompañada de palabras de Yaneth en interacción con la profesora Johanna. Reconstrucción del video

L7. Profesora Johanna: Figura 5.

L8. Yaneth: Eh acá se ponen 5, 5 círculos y acá se ponen ehm ehm [s*e ríe*].

L9. Profesora: ¿Cuántos?, pues contémoslos ¿cuántos allí? [s*eñala la hoja*].

L10. Yaneth: [*Cuenta con el lápiz*].

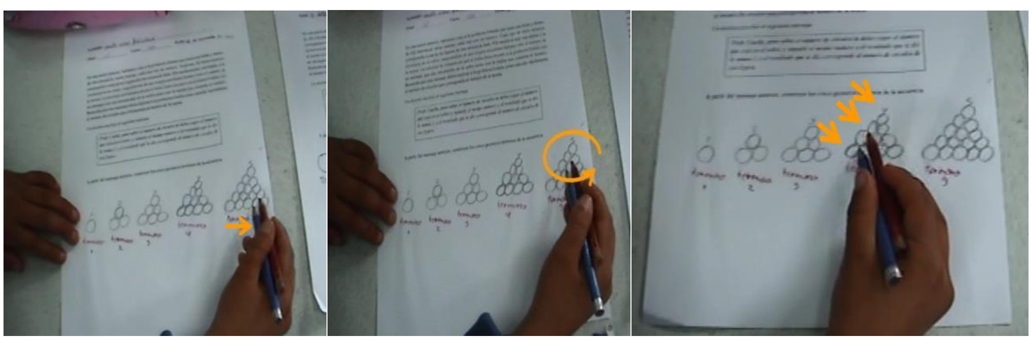


Figura 70. Una cuarta secuencia de señalamientos y deícticos espaciales acompañada de palabras de Yaneth en interacción con la profesora Johanna. Reconstrucción del video

L11. Profesora Johanna: Ah bien, entonces, por ejemplo, digamos que a la profe Estelita le salió el uno, entonces ¿ella qué tenía que hacer? ¿Sumarle cuánto? (…) [*interviene Luis Felipe*].

L12. Luis Felipe: Sumarle 1 más 1, más 1.

L13. Profesora Johanna: Entonces, 1más 1, o sea 1más 1, 2, más 1de acá, 3. Listo, ¿cómo construir la 2? [*señala la hoja*].

L14. Luis Felipe: Es 2 más 2, más 1, entonces ahí dan 5.

L15. Profesora Johanna: 3 [*señala la hoja*].

L16. Luis Felipe: 3.

L17. Profesora Johanna: ¿Cuáles 3?, ¿cuáles 3?

L18. Luis Felipe: 3 [*Señala tres círculos en la hoja*].

L19. Profesora Johanna: 3, y ¿cuáles otros 3?

L20. Luis Felipe: Más 3 [*Señala 3 círculos en la hoja*], más 1[*señala el círculo restante de la figura*].

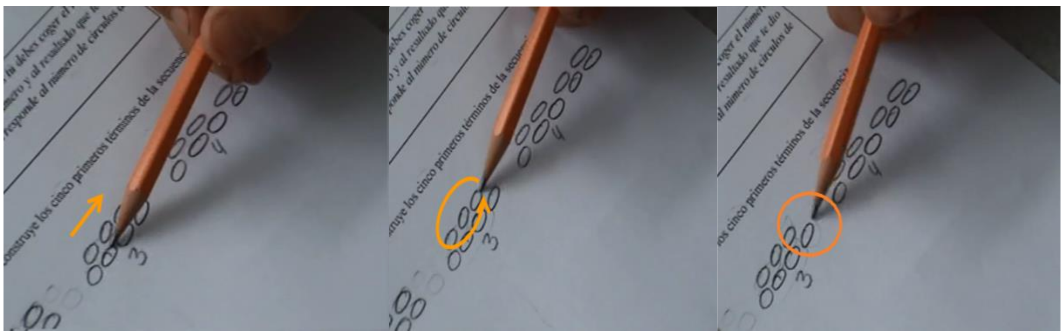


Figura 71. Secuencia de señalamientos acompañada de palabras de Luis Felipe en interacción con la profesora Johanna. Reconstrucción del video

L21. Profesora: Acá, 4.

L22. Luis Felipe: El de 4 igual, 4.

L23. Profesora: ¿Cuáles 4?

L24. Luis Felipe: Estos 4[*señala 4 círculos en la hoja*].

L25. Profesora Johanna: Esos 4.

L26. Luis Felipe: Más 4[*señala otros 4 círculos en la hoja*].

L27. Profesora Johanna: Más otros 4.

L28. Luis Felipe: Más 1[*Señala el círculo restante en la hoja*].

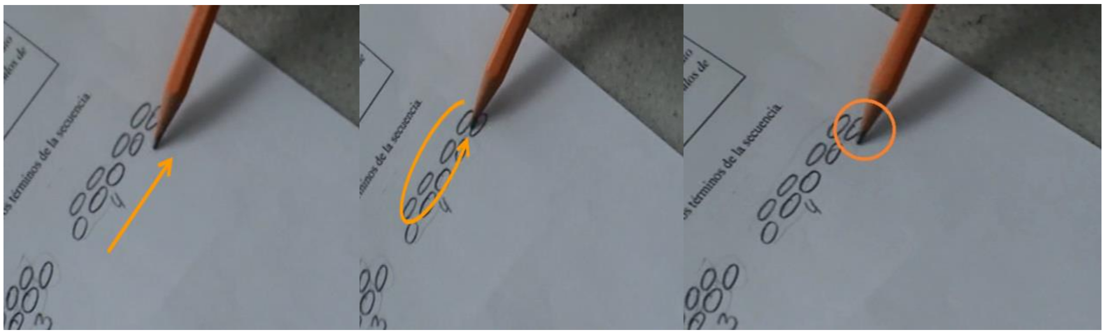


Figura 72. Una segunda secuencia de señalamientos acompañada de palabras de Luis Felipe en interacción con la profesora Johanna. Reconstrucción del video

L29. Profesora: Más 1, ¿y la 5?

L30. Luis Felipe: 5 [*Señala 5 círculos en la hoja*], más otros 5 [*señala otros 5 círculos en la hoja*] más 1[*señala el círculo restante de la figura*].

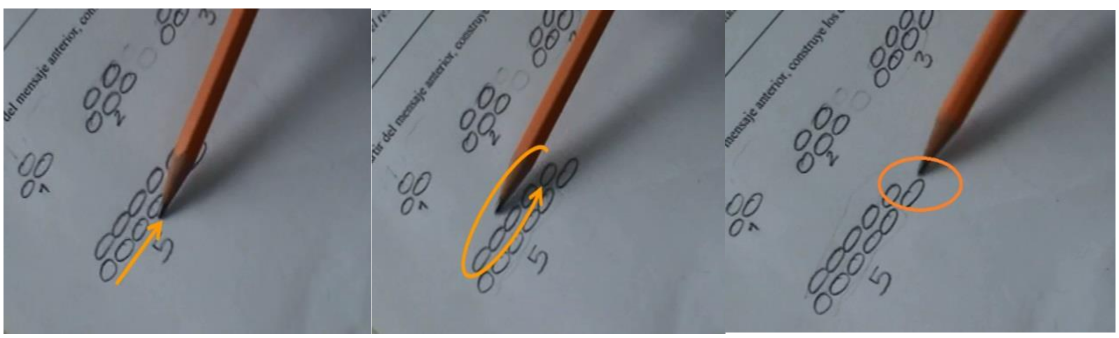


Figura 73. Una tercera secuencia de señalamientos acompañada de palabras de Luis Felipe en interacción con la profesora Johanna. Reconstrucción del video

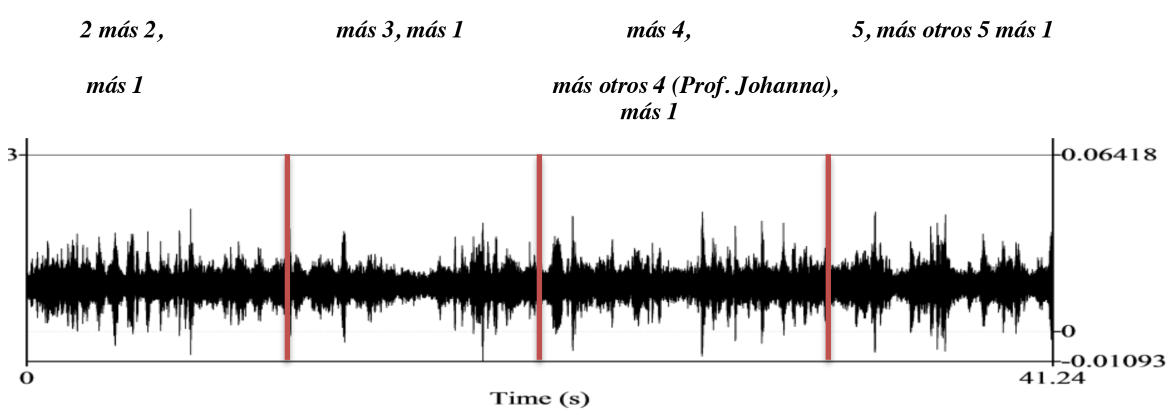


Figura 74. Un análisis prosódico en el programa Praat de las elocuciones de Luis Felipe y de la profesora Johanna

En la Figura 74 mostramos un fragmento de 41.24 segundos a través del programa Praat, en donde representamos las elocuciones sucesivas de Luis Felipe, con intervenciones alternadas de la profesora Johanna. Como lo muestra la forma de onda, Luis Felipe hace sus elocuciones *"2 más 2, más 1", "más 3, más 1", más 4, más otros 4* (esta última elocución es de la profesora Johanna quien interviene casi rítmicamente)*, "5, más otros 5 más 1",* las cuales le permiten al estudiante resaltar la monotonía de sus acciones de contar, pausar y adicionar. Es importante aquí resaltar el papel del ritmo como un medio semiótico de objetivación. Aclaramos que la profesora Johanna también interviene repetidamente afirmando y preguntando, y Luis Felipe interviene respondiendo en una especie de vaivén. Lo que queremos resaltar en la Figura 74 es la dinámica casi rítmica de los dos tipos de elocuciones en la interacción de 41.24 segundos que viven los dos, aunque hemos escrito arriba de la figura las elocuciones de Luis Felipe con una intervención de la profesora Johanna en relación con la figura 4 de la secuencia que produjo el estudiante.

Yaneth y Luis Felipe produjeron secuencias diferentes usando la misma indeterminancia algebraica contenida en el mensaje. Observemos que las configuraciones de las dos secuencias pagan tributo, por un lado a la historia cultural de las sesiones anteriores de trabajo y, de otra parte, a la misma estructura lingüística del mensaje, particularmente cuando se dice que *"tú debes coger el número que está en el sobre y sumarle el mismo número y al resultado le sumas 1"*, lo cual podría hacer pensar en los estudiantes que la secuencia que deben construir tiene dos filas, una superior y otra inferior (el caso de Luis Felipe), o construir una secuencia como la de la Tarea 1 (el caso de Yaneth).

Capítulo 5
Resultados de la Investigación

5.1 Introducción

La empresa llevada a cabo en esta investigación nos planteó retos importantes no sólo en la dimensión teórica, sino también en sus aspectos metodológicos. Consideramos una fortaleza de este trabajo la articulación entre estas dos dimensiones. No podría ser de otra manera. La teoría de la objetivación y los elementos asociados con la concepción multimodal del pensamiento humano posibilitaron una mirada muy cercana de la actividad matemática de nuestros estudiantes cuando enfrentaron las tareas sobre secuencias de generalización de patrones.

Estructuramos este capítulo abordando, en primer lugar, la respuesta a nuestra pregunta de investigación. Dicha respuesta se afinca en los planteamientos filosóficos de Hegel y en la toma de conciencia de la importancia del pensamiento multimodal de nuestros estudiantes. Seguidamente, en el apartado de Síntesis y observaciones finales, exponemos algunos elementos que nos parecen importantes subrayar en tanto generan reflexiones didácticas en torno a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar a la vez que sugerimos algunas posibilidades de investigación que se pueden suscitar con este trabajo.

5.2 Respuesta a la pregunta de investigación

La pregunta de investigación que nos planteamos fue la siguiente:
¿Qué formas de pensamiento algebraico temprano emergen en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años), como resultado de su participación en la actividad matemática del aula, específicamente en torno a tareas sobre generalización de patrones?

De los análisis realizados sobre las producciones de los estudiantes a lo largo de las tareas propuestas sobre generalización de patrones, podemos afirmar que las formas de pensamiento algebraico temprano Factual y Contextual emergen o aparecen como posibilidades que los estudiantes instancian en la actividad. Ésta la entendemos, en su estructura, como el diseño didáctico de las tareas y el evento o actividad tal y como ocurrió en cada caso, es decir durante cada sesión y más específicamente como se desplegó a partir de los diálogos que sostuvieron los estudiantes entre sí, con la profesora Johanna y con el investigador. Las evidencias analizadas nos permiten constatar que es en la materialidad de la actividad donde el estudiante puede tomar conciencia de estas formas de pensamiento algebraico.

En el capítulo anterior mostramos que los tres vectores que caracterizan el pensamiento algebraico (sentido de la indeterminancia, analiticidad y expresión semiótica) cambian según lo hace el Particular hegeliano. Los análisis realizados sugieren que la actividad, en general, desarrollada antes del Problema del Mensaje, no invita a pensar la indeterminancia en forma analítica. Este resultado se debió a que las exigencias establecidas en las tareas antes de este Problema propiciaron posibilidades de expresión semiótica en los estudiantes pero al mismo tiempo impusieron ciertos límites. Puede apreciarse cómo en las tareas inquiríamos por el número de círculos (cuadrados, por ejemplo) de figuras remotas, además los mensajes elaborados por los estudiantes se supeditaron al trabajo sobre figuras lejanas pero particulares. Antes de este Problema, la indeterminancia y la analiticidad aparecieron en una forma intuida y la primera (indeterminancia) quedó sin nombrar.

El Problema del Mensaje funcionó como elemento clave de la actividad en la aparición de formas más complejas de pensamiento algebraico. En su abordaje los alumnos tuvieron que movilizar otros medios semióticos de objetivación, en este caso recursos lingüísticos ("*a la figura le sumo el mismo número de la figura y al resultado que me dé le sumo 3*", "*el numero que te entregaron tienes que multiplicarlo por 2 y el numero que te dio le sumas 3*", *"sumar el número que le salga en la tarjeta dos beses y le suma mas tres"),* que permitieron instanciar otra forma o estrato de pensamiento algebraico como lo es el Contextual, es decir, una forma de pensamiento algebraico que está en continuidad con el

Factual pero que va más allá, va más lejos. En este sentido, podemos afirmar que hay una *evolución del pensamiento algebraico Factual hacia el Contextual*. Por ejemplo, las expresiones semióticas antes y durante el Problema del Mensaje son distintas, pues en el primer caso se instanciaron expresiones como, por ejemplo, *1000x2 + 3,* mientras que en el segundo caso se produjeron expresiones como *#figura x2 + 3*. En este estrato de pensamiento algebraico Contextual la indeterminancia se tradujo en un objeto del discurso por parte de los estudiantes.

La idea que mantuvimos de *saber* como *movimiento* la evidenciamos a través de testimonios de cambio o como lo plantea Aristóteles, como un antes y un después. Dicha transformación se testimonió a partir del hecho de que el saber cultural (saber "en sí mismo") se transformó en un saber "para sí mismo", esto es, se transformó en saber para los estudiantes. Esta transformación resultó en una nueva forma de percibir, hablar y manipular conceptualmente las secuencias, lo cual sugiere un desarrollo de procesos inacabados o perpetuos, esto es, procesos de subjetivación. A lo largo de las sesiones de trabajo y del desarrollo de la actividad, logramos identificar cómo los estudiantes fueron instanciando formas culturales de pensamiento, reflexión y acción que han quedado codificadas en la cultura.

En el movimiento con el que es propulsado el saber por la actividad, o labor conjunta, ocurrieron las instanciaciones (producciones de los estudiantes) que son singulares en movimiento ellos mismos. Para ser reconocidos, debe haber una codificación cultural que los objetiva y los reconoce. Su codificación los convierte en potencialidad que puede ser enactivada, en el sentido de Radford, a través de una actividad o labor. La objetivación, o la transformación del saber "en sí mismo" en un objeto de conciencia, no fue el resultado de actos solitarios de los estudiantes, no fue el resultado de la contemplación, por el contrario, tal y como se observaron en los diversos diálogos mantenidos entre los estudiantes y la profesora Johanna y los estudiantes y el investigador, la objetivación es la transformación, es el resultado de una actividad material sensorial conjunta -una actividad en donde los estudiantes y la profesora Johanna "lucharon" por comunicar: sus intenciones, el patrón que generaba las secuencias, la comunalidad que relacionaba los términos de la secuencia, etc.

Los análisis llevados a cabo en este estudio ponen en evidencia que las secuencias figurales con apoyo tabular hacen movilizar en los estudiantes formas perceptivas y gestuales que no son movilizadas con la misma intensidad cuando los estudiantes enfrentan tareas sobre secuencias numéricas con apoyo tabular. En efecto, las secuencias figurales posibilitan una articulación de las estructuras espacial y numérica, lo cual se traduce en un aspecto importante del desarrollo del pensamiento algebraico. Dichas estructuras sirvieron de punto de referencia para efectuar la generalización, la cual se consideró como algebraica Factual en el caso de las tareas 1 y 2 y algebraica contextual en el caso de las Tareas 4 y 6.

El análisis de los procesos de generalización a los que recurren los alumnos en el caso de la secuencia numérica con apoyo tabular (Tarea 3) sugiere que inicialmente se presentan generalizaciones aritméticas y posteriormente se avanza (en términos de evolución hegeliana) para lograr una generalización algebraica Factual. En particular, el proceso de generalización de Yaneth se basa en un trabajo de relaciones entre números (pues no se cuenta con elementos geométrico-espaciales). Si bien identificamos en este caso una generalización aritmética muy sofisticada, no evidenciamos, inicialmente, un tránsito entre la abducción y la hipótesis (abducción analítica). El Particular hegeliano jugó un papel preponderante en la idea de hacer evolucionar la generalización aritmética en una algebraica. En particular, Luis Felipe efectúa (y también Yaneth), de hecho, una generalización algebraica Factual, pues, como lo evidenciamos, él llevó a cabo un proceso de generalización de acciones en la forma de un esquema operacional (que permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos y gestos como señalamientos o apuntamientos), lo cual le permitió ir más allá de los tres primeros términos y hacer evidente un patrón para determinar el número de cualquier término específico.

En el caso de la Tarea 5 (Secuencia puramente numérica), observamos que los alumnos regresan de nuevo a producciones que evidencian generalizaciones aritméticas y más aún, emergen estrategias de ensayo-error que terminan en meras adivinanzas o inducciones ingenuas. El abordaje de esta tarea pone en evidencia que para los estudiantes el primer término siempre es el número menor, incluso si la secuencia que enfrentan es una de tipo puramente figural como la Tarea 6. Nuevamente el Particular hegeliano, es decir, su estructura, imprime su huella. Tanto los tipos de secuencia (puramente numérica y puramente figural) como los requerimientos establecidos en cada una de ellas, junto con la actividad desplegada, posibilitan las naturalezas de sus instanciaciones o producciones.

El análisis de la actividad matemática de los estudiantes a través de sus producciones, indica que la objetivación ocurrió cuando los estudiantes y la profesora Johanna (el profesor Rodolfo), a través de la actividad sensorial y práctica conjunta, hicieron emerger en el Singular la conceptualidad de lo General. Corroboramos la idea teórica de Radford (2013a) según la cual la objetivación ocurre cuando el Singular actualiza una forma de mirar las secuencias, una forma de mirar que es de naturaleza algebraica. Como sostiene Radford (2012a), se han domesticado tanto el ojo como la mano. Coincidimos en este punto con los planteamientos de Radford (2013a) cuando señala que la objetivación es el momento de la actividad donde lo General, mediado por el Particular, se nos muestra a través del Singular en la conciencia del estudiante.

El caso representativo que logramos registrar y analizar en esta investigación refiere al medio semiótico *"la torre",* el cual no constituyó un mero recurso en el acto de conocer de los estudiantes, sino que fungió como un recurso semiótico en tanto medió los actos intencionales de ellos. La denominación lingüística *"la torre"* por parte de los estudiantes constituye un hallazgo de esta investigación que no ha sido reportado en otros trabajos en educación matemática. Las evidencias que presentamos y analizamos sugieren que las diversas instanciaciones del saber (por ejemplo, pensamiento algebraico Factual), esto es, el conocimiento, que van logrando los estudiantes, llega a ser *conocimiento-con la torre*, como opuesto a conocer vía la torre. Este recurso semiótico reguló en cierto momento la actividad matemática de estos estudiantes, en tanto condicionó las formas como ellos se apropiaron, construyeron o re-significaron dicha actividad y desde luego las maneras de pensar. Este hallazgo coincide con los planteamientos de Radford (2012b) en el sentido que estos artefactos se incrustan o encarnan en la manera en que los estudiantes piensan y llegan a conocer. Coincide también con lo señalado por Cole & Wertsch (1996), cuando plantean que estos instrumentos recrean y reorganizan la estructura del comportamiento humano.

El trabajo desarrollado por los estudiantes en el Problema del Mensaje evidenció una reducción de recursos semióticos y a la vez una concentración del significado en relación con las secuencias. Logramos establecer que a lo largo de las sesiones una gran mayoría de estudiantes tomó una mayor conciencia sobre las características de las secuencias, sobre las maneras de construirlas, la identificación de la comunalidad, entre otras. En términos de desarrollo conceptual, podemos identificar la evolución de la unidad de componentes materiales e ideacionales del pensamiento algebraico, pues presentamos evidencias de avances importantes, por parte de los estudiantes, en su actividad semiótica, en la cual podemos inferir que hubo una toma de decisiones entre lo que consideraban relevante e irrelevante. Este proceso resulta en una vinculación más refinada de los recursos semióticos y en consecuencia un nivel más profundo de conciencia y de inteligibilidad del problema en cuestión. En síntesis, podemos inferir que algunos estudiantes desarrollaron un proceso de contracción semiótica, esto es, un proceso genético o de desarrollo conceptual.

En este contexto, mostramos que la analiticidad aparece mediada por los medios semióticos de objetivación. La denotación se hace a través de una actividad multimodal en la que intervienen la percepción, los gestos y el lenguaje natural. Los alumnos llegan a constituir fórmulas encarnadas en la acción y en el lenguaje y que se aplica a cualquier término o figura particular. La riqueza y potencia del Problema del Mensaje son evidentes. Los estudiantes lograron hacer una generalización algebraica de patrones (Radford, 2008b), pues a partir de la identificación de una característica común lograron plantear una abducción que se tradujo luego en principio asumido o hipótesis, lo cual les permitió deducir apodícticamente una fórmula o regla que proporcionó el valor de cualquier figura.

En el trabajo desarrollado por los estudiantes con este Problema también evidenciamos que el Particular hegeliano cambia de naturaleza debido al tipo de exigencia que propusimos en la tarea, lo cual propulsa otro tipo de actividad o evento, representado por las producciones de los estudiantes y los diálogos que emergieron entre los estudiantes, entre los estudiantes y la profesora Johanna y entre los estudiantes y el proponente de esta tesis doctoral.

Esta investigación muestra que recursos semióticos tales como los gestos, el movimiento, la ritmicidad y la actividad perceptual son consubstanciales a la manifestación y constitución del pensamiento algebraico temprano. Los análisis de los datos sugieren, por ejemplo, el papel importante del ritmo como medio semiótico de objetivación. En el proceso de semiosis perceptiva, presentamos análisis de evidencias que indican que la coordinación de deícticos espaciales, ritmo, palabras y actividad perceptual constituye un nodo semiótico, el cual caracteriza la actividad reflexiva de algunos estudiantes, sobre todo en los procesos progresivos de la aprehensión perceptual del patrón y su generalización.

El análisis de las diversas producciones o instanciaciones de los estudiantes sugiere que el lenguaje natural les sirve de apoyo para expresar a través de una fórmula corpórea, por ejemplo, cuestiones relacionadas con el tiempo; así, expresiones tales como *"sigue sucesivamente",* sugiere que se ha capturado el patrón y se ha identificado la comunalidad. El estudiante no predica sobre una figura particular sino sobre todas las figuras, trascendiendo el aquí y el ahora. El uso de deícticos espaciales en expresiones, por ejemplo, como: "*tiene que ir abajo 5 círculos", "el que sigue", "aquí arriba", "aquí abajo"*, entre otras, puestos en funcionamiento por parte de los estudiantes en sus instanciaciones, son elementos que nos muestran cómo el lenguaje simbólico incorpora la dimensión lingüística. Este hallazgo es importante, pues por lo general en una fórmula algebraica estas expresiones quedan implícitas en su estructura y ésta no deja ver quizás las maneras como han evolucionado las fórmulas corpóreas que se han expresado a través de acciones (por ejemplo, gestos, ritmos, miradas, palabras) y que se despliegan en el espacio y el tiempo. Este elemento didáctico es un indicador que nos brinda información valiosa sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano.

En consonancia con el pronunciamiento anterior, consideramos que esta investigación pone de manifiesto la relevancia de recursos semióticos como tocar, mover, mirar, importancia que ha sido subrayada por Arzarello (2006), cuando señala que estos recursos semióticos emergen como aspectos importantes en la constitución y manifestación del pensamiento algebraico.

5.3 Síntesis y observaciones finales

Los datos expuestos y analizados en esta investigación indican que la consubstancialidad del conocimiento y la actividad (a través de la cual el saber es instanciado) es puesta de presente en las maneras como los estudiantes conocen. Esta consubstancialidad, que se refleja en la manera en la cual las formas culturales como los estudiantes se interrelacionan entre ellos mismos y ellos con la profesora Johanna (y con el investigador), imprime su huella al contenido conceptual instanciado.

El conocimiento que han logrado nuestros estudiantes sobre el pensamiento algebraico en relación con tareas sobre secuencias, si bien es importante, también es necesario subrayar que no es completo. Coincidimos con Radford (2013a) cuando sostiene que el movimiento actualizado no puede capturar lo General en su totalidad. Y no puede hacerlo porque lo General sólo puede ser objeto de la conciencia a través de Particulares y Singulares. Como resultado, la actualización ostensivamente encarna lo General y al mismo tiempo lo hace desaparecer. Esta es la razón por la que la actualización (como evento) es siempre deficiente. Esta investigación muestra, sin embargo, que su deficiencia es portadora de nuevas posibilidades, ya que sólo a través de la actualización algo nuevo puede surgir.

Destacamos que los tres vectores que caracterizan el pensamiento algebraico cambian según lo hace la estructura del Particular hegeliano en sus componentes $\boldsymbol{\Phi}$ y $\boldsymbol{\Theta}$. Más específicamente, hemos mostrado que la continuidad entre el pensamiento algebraico Factual y el pensamiento algebraico Contextual está determinada por la naturaleza de la indeterminancia, lo cual podría sugerir también una continuidad entre el pensamiento algebraico Contextual y el Estándar o Simbólico. En este sentido, el Problema del Mensaje funge como parte del Particular hegeliano que provoca tal evolución o continuidad.

Este trabajo evidencia la presencia de dos analiticidades. Una analiticidad (GA) relativa a la generalización algebraica como deducciones que se hacen a partir de ciertas premisas y otra (PA) asociada al carácter operatorio de la indeterminancia, la cual constituye una de las características del pensamiento algebraico. Postulamos que el pensamiento algebraico, desde la caracterización sugerida por Radford (2010b) (indeterminancia, analiticidad y expresión semiótica), engloba la generalización algebraica de patrones también caracterizada por este autor (Radford, 2013b). Es más, conjeturamos que, al parecer, la analiticidad GA propulsa la analiticidad PA, instanciando una forma de pensamiento algebraico Contextual pues la indeterminancia, en este estrato de pensamiento, es analítica.

Esta investigación aporta conocimiento relacionado con estrategias que los estudiantes de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años) ponen en juego cuando abordan problemas de generalización de patrones y con la caracterización del pensamiento algebraico en alumnos jóvenes. Varias reflexiones se han hecho presentes a lo largo de este trabajo y algunas posibilidades de investigación han emergido. Consideramos pertinente y necesario adelantar indagaciones sistemáticas que nos arrojen luces de respuesta sobre los siguientes temas:

- La relación del Particular hegeliano con la evolución del pensamiento algebraico Contextual hacia el pensamiento algebraico Simbólico o Estándar. Esta exploración debería identificar, en relación con las producciones o instanciaciones de los estudiantes, evidencias sobre la evolución de fórmulas corpóreas hacia “formas más sofisticadas”.

- La relación dialéctica entre los procesos de generalización algebraica y las formas de pensamiento algebraico. Nuestra investigación aporta elementos de dicha relación y plantea algunos puntos de reflexión que merecen retomarse en futuras investigaciones. En particular, sería interesante estudiar de manera más sistemática las relaciones entre la analiticidad GA y la analiticidad PA. Nos parece también conveniente profundizar las generalizaciones aritméticas y algebraicas en relación con el Particular hegeliano. Al parecer existen formas sofisticadas de generalización aritmética o tal vez proto-formas de pensamiento algebraico (basadas en una proto-analiticidad).

- Analizar sistemáticamente la incorporación del lenguaje natural en las formulaciones algebraicas de los estudiantes. Un estudio mucho más profundo debería visibilizar cómo se van orquestando estas formulaciones algebraicas, lo cual podría establecer un papel importante de los deícticos espaciales y temporales así como la coordinación de estos con la percepción y la ritmicidad. Este análisis quizás conduzca a comprender aún más el proceso de contracción semiótica de los estudiantes.

En términos más generales, consideramos que la investigación aporta elementos didácticos y metodológicos que nos permiten repensar los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, en tanto ponen en el horizonte didáctico formas alternativas de intervención en el aula de matemáticas que necesariamente deberían considerar aspectos corpóreos en el acto de conocer y aprender.

Los resultados de esta investigación arrojan elementos que contribuyen a la construcción de currículos —y materiales curriculares— que consideren la perspectiva de Álgebra Temprana, construcción curricular que debe incidir en una mejora significativa de los aprendizajes de los estudiantes, más específicamente, debe redundar en una educación matemática con sentido y significado para ellos. Finalmente, esperamos que estos resultados puedan alimentar los currículos de los programas de formación inicial de docentes de matemáticas, en tanto aportan elementos que permiten pensar en derrotar el prejuicio o la creencia errada de que los aprendizajes de nuestros estudiantes en matemáticas son memorísticos, mecánicos, descontextualizados e inertes, estáticos y en general, útiles para muy poco.

Referencias Bibliográficas

Agudelo-Valderrama, C. (2000). Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Agudelo-Valderrama, C. y Vergel, R. (2009). Proyecto PROMICE - *Promoción de un enfoque interdisciplinario y de resolución de problemas en el inicio del trabajo algebraico escolar: integrando contextos de ciencias y el uso de tecnología digital*. Informe final del Proyecto PROMICE – Código 86 de 2007. Centro de documentación, IDEP: Bogotá.

Alibali, M. W., Kita, S., & Young, A. (2000). Gesture and the process of speech production: We think, therefore we gesture. *Language and Cognitive Processes, 15*, 593–613. doi:10.1080/016909600750040571.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking (*editores invitados: L. Radford y B. D'Amore), pp. 267-299.

Arzarello, F. & Edwards, L. (2005). Gesture and the construction of mathematical meaning. En H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedeings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 123-154). Melbourne: PME.

Azarquiel, Grupo. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.

Bajtín, M. (1992). *El marxismo y la filosofía del lenguaje*. Madrid: Alianza Editorial. (Original publicado en 1929).

Bajtín, M. (2009). *Estética de la creación verbal*. México: Siglo XXI. (Original publicado en 1979).

Baquero, R. (2009). *Vigotsky y el aprendizaje escolar*. Buenos Aires: Aique.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Bonilla, S. (1994). *Categorías de la interpretación de las letras en álgebra escolar por los estudiantes de noveno grado*. Unpublished MA, Universidad Externado de Colombia, Bogotá.

Booth, L. (1984). *Algebra: children's strategies and errors*. Windsor, Bershire: NFER-Nelson Publishers Company Ltd.

Booth, L. R. (1999). Children's difficulties in beginning algebra. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking*. *Grades K-12. Readings from NCTM's school-based journals and others publications* (pp. 299-307). Reston, VA: NCTM.

Bruner, J. (2006). *Actos de significado*. *Más allá de la revolución cognitiva*. Madrid: Alianza editorial.

Bruner, J. (2010). *Realidad mental y mundos posibles*. *Los actos de la imaginación que dan sentido a la experiencia*. Barcelona: Gedisa.

Calderón, D. (2005). *Dimensión cognitiva y comunicativa de la argumentación en matemáticas*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona.

Cárdenas, J. A. (en prensa). La mediación en Vygotski. *Seminario doctoral "Sujeto y Alteridad en el Discurso Pedagógico"*, *Doctorado Interinstitucional en Educación,* Bogotá, Colombia.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: NCTM e IAP.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.

Carpenter, T. P. y Franke, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: generalization and proof. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference*. *The future of the teaching* *and learning of algebra* (pp.155-162). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Castañares, W. (1985). *El signo: problemas semióticos y filosóficos*. Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, Madrid. Recuperado el 8 de mayo de 2011 de http://www.unav.es/gep/TesisDoctorales.html

Castorina, J. A. & Carretero, M. (Comps.) (2012). *Desarrollo cognitivo y educación. Procesos del conocimiento y contenidos específicos* (Vol. II). Buenos Aires: Paidós.

Cole, M. (1999). *Psicología Cultural*. Madrid: Morata.

Cole, M. & Wertsch, J. (1996). Beyond the Individual-Social Antinomy in Discussions of Piaget and Vygotsky. *Human Development* 39, pp. 250-256.

D´Amore, B. (2001). Cocepttualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matemática e la sua didattica*, *2*, 150-173.

D'Amore B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. In: *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Numero speciale della rivista *Relime* (Cinvestav, México DF., México), Radford L., D'Amore B. (eds.) (2006). 177-196.

D'Amore, B., Radford, L., Bagni, GT. (2007). *Obstáculos epistemológicos y perspectiva socio-cultural de la matemática*. Colección "Cuadernos del Seminario en educación". Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

D´Amore, B., Fandiño, M. I. & Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática*. (M. Fandiño, Trad.). Bogotá: Magisterio.

Davydov, V. V. (1981). *Tipos de generalización en la enseñanza*. La Habana: Pueblo y Educación.

Descartes, R. (1954). *The geometry*. New York: Dover. (Original work published 1637).

Dörfler, W. (1991). 'Forms and means of generalization in mathematics'. En A. Bishop *et all* (eds), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, Kluwer Academic Publishers, 63-85.

Duval, R. (2001). *The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics*. Paper presented at the Semiotics Discussion Group of the 25th

PME International Conference, Freudenthal Institute, The Netherlands, July 2001.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle (Original publicado en 1995).

Eco, U. (1988). *Le signe* [the sign]. Bruxelles: Éditions Labor.

English, L. D. & Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher*, *91*(2), 166-171.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of Mathematics Education*. London: Falmer Press.

Fairclough, N. (1995). *Critical discourse analysis; the critical study of languages*. New York, USA: Longman.

García, J. A. (1998). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de la Laguna.

García, J. (2006). Identidad y alteridad en Bajtín. *Acta Poética* 27 (1).

Gehlen, A. (1988). *Man, his nature and place in the world*. New York: Columbia University Press.

Glaser, B. G. (1978). *Theoretical Sensitivity*. *Advances in the Methodology of Grounded Theory*. Mill Valley, CA: Sociology Press.

Glaser, B. G. (2002). "Constructivist Grounded Theory?". Forum: *Qualitative Sozial forschung*/Forum: Qualitative Research (periódico on line), 3(3). Disponible en: http:/qualitative-research.net/fqs-texte/3-o2/3-02glaser-e.htm.

Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory*. *Strategies for Qualitative Research*. Chicago: Aldine.

Gillin, J. (1948). *The ways of men*. New York, EU: Appleton-Century-Crofts.

Godino, J & Font, V. (2000). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Granada. Recuperado en internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros/

Goetz, J. & Lecompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

Goldin, G. (1998). Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. In *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph number 9*. Qualitative Research Methods in Mathematics Education. Reston, Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Goldin, G. (2000). A scientific perspectives on structured, task-based interviews in mathematics education research (pp. 517-545). En A. Kelly & R. Lesh (Eds.). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. New Jersey London: LEA, publishers.

Hegel, G. (2001). *The philosophy of history*. Kitchener, ON: Batoche Books. (Original publicado en 1837).

Hegel, G. (2004). Enciclopedia de las ciencias filosóficas. México. Porrúa. (Original publicado en 1817).

Hegel, G. (2009). *Logic*. (W. Wallace, Trans.). Pacifica, CA: MIA. (Original publicado en 1830).

Herrero, C. (1992). "Mijail Bajtín y el principio dialógico en la creación literaria y en el discurso humano". En *Revista Suplementos: Historia de la relación filosofía-literatura*. Barcelona: Anthropos. No. 32, (mayo).

Howe, R. (2005). *Comments on NAEP algebra problems*. Retrieved on 24.03.12 http://www.brookings.edu/~/media/Files/events/2005/0914_algebra/Howe_Presentation.pdf

Husserl, E. (1931). Ideas: General introduction to pure phenomenology (W. R. B. Gibson, Trans. Third Edition, 1958). London: Allen & Unwin.

Ilyenkov, E. (1977). 'The concept of the ideal'. In *Philosophy in the USSR: Problems of Dialectical Materialism*, Progress Publishers, Moscow.

Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema,, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, N.J: L. Erlbaum Associates, Publishers.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. & Blanton, M. (2001). Algebrafying the Elementary Mathematics Experience. Part I: Transforming Tasks Structures. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study, Vol. 1, pp. 344-351). Melbourne: University of Melbourne.

Kendon, A. (1980). Gesticulation and speech: Two aspects of the process of the utterance. En M. R. Key, *The relationship of verbal and nonverbal communication* (pp. 207-227). Inglaterra: Mouton.

Kendon, A. (1987). On gesture: Its complementary relationship with speech. En A. W. Siegman & S. Feldstein (Eds.), *Nonverbal behavior and communication* (pp. 65-97). New Jersey, E.U.: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran. Research agenda for mathematics education: Vol. 4. *Research issues in the learning and teaching of algebra*, pp.33-56. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator, 18*(1), 139-151.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and the teaching of algebra: A broadening of sources of meaning. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education*: *Past, present, future*, ed. A. Gutiérrez and P. Boero, 23-49. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers. Can be useful to the analysis of this phenomenon. *ICMI*, Rome, March 2008.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels. En Lester, F. K. (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 707-762). Reston, Virginia: NCTM e IAP.

Kozulin, A. (2000). *Instrumentos psicológicos: la educación desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Krutetzki, V.A. (1976). *'The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren'*. Translated from the Russian by J. Teller. Edited by J. Kilpatrick and I. Wirszup. The University of Chicago Press.

Lamiell, J. T. (2003). *Beyond individual and Group Differences*. Thousand Oaks, Ca: Sage

Lins, R. & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra*. *The 12th ICMI Study* (pp.47-70). Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers.

Maddock, M. N. (1981). Science education: An anthropological viewpoint. *Studies in Science Education*, *8*, 1-26.

Marx, K. & Engels, F. (1970). *The German Ideology*, Edited with Introduction by C. J. Arthur, New York: International Publishers.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra*. *Perspectives for Research and Teaching*. London: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1982). *Mathematical thinking*. London: Addison-Wesley.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gowar, N. (1999). *Raíces del álgebra/Rutas hacia el álgebra*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Maybee, J. (2009). *Picturing Hegel*. Lanham, MD: Lexington Books.

McNeill, D. (1985). So you think gestures are nonverbal? *Psychological Review, 92*(3), 350-371.

Merleau-Ponty, M. (1945). Phénomenologie de la perception. Paris: Gallimard.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia –MEN- (1998). *Lineamientos Curriculares para Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia –MEN- (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Magisterio.

Miranda, I. (2009). *Objetivación de saberes científico-culturales relacionados con el movimiento lineal representado con gráficas cartesianas: una experiencia con estudiantes de Bachillerato*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de

Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Miranda, I., Radford, L. & Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, *19*(3), 5-30.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

Molina, M., Castro, E. & Ambrose, R. (2006). Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. *PNA*, *1*(1), 33-46.

Montagu, A. (Ed.). (1968). *Man's adaptive dimension*. New York, EU: Oxford University Press.

NCTM 'National Council of Teachers of Mathematics' (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Noel, G. (1995). *La lógica de Hegel*. (J. A. Díaz, Trad.). Bogotá: Editorial Universidad Nacional. (Original publicado en 1933).

Orton, A. & Orton, J. (1994). 'Students' perception and use of pattern and generalization', en J. P. da Ponte y J. F. Matos (eds), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, University of Lisbon, 407-414.

Orton, A. & Orton, J. (1996). 'Making sense of children's patterning' en L. Puig y A. Gutierrez (eds), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4, University of Valencia, 83-90.

Perry, P., Gómez, P., Valero, P., Castro, M. & Agudelo-Valderrama. (1998). *Calidad de la educación matemática en secundaria*. *Actores y procesos en la institución educativa*. Bogotá: "una empresa docente". Universidad de los Andes.

Planas, N. (2002). Nociones sociales recontextualizadas en Educación Matemática: el caso de la competencia comunicativa. *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (pp. 175-186). Logroño: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Recuperado en internet el 17 de abril de 2011 en: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/conocimiento/Nociones%C2%A0sociales%C2%A0recontextualizadas%C2%A0en%C2%A0educaci%C3%B3n%C2%A0matem%C3%A1tica:%C2%A0el%C2%A0caso%C2%A0de%C2%A0la%C2%A0competencia%C2%A0comunicativa*Planas,%20N%C3%BAria*831066%5B1%5D.pdf

Popkewitz, T. (2004). The alchemy of the mathematics curriculum: Inscriptions and the fabrication of the child. *American Educational Research Journal, 41*(1), 3-34.

Pretexto Grupo (1999). *La transición aritmética-álgebra*. Bogotá: Gaia.

Radford, L. (1996). The Roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective. Cap.3, pp. 39-54. En N. Bednarz et al (Eds.), *Approaches to Algebra*. *Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht: Kluwer.

Radford, L. (1997). L'invention d'une idée mathématique: la deuxième inconnue en algèbre, Repères (*Revue des instituts de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques de France*), juillet, *28*, 81-96.

Radford, L. (2000a). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Educación Matemática, 12*(1), 51-69.

Radford, L. (2000b). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 237-268.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Studens´ Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*. *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2004). La généralisation mathématique comme processus sémiotique. In G. Arrigo (ed.), *Atti del convegno di didattica della matematica 2004*, Alta Scuola Pedagogica. Locarno: Suisse, pp. 11-27.

Radford, L. (2004a). Syntax and meaning. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad, *Proceedings of the PME-28*, Vol. 1, pp. 161-166. Bergen, Norway.

Radford, L. (2004b). Semiótica cultural y cognición. *Conferencia plenaria Décima octava Reunión latinoamericana de Matemática Educativa*. Universidad Autónoma de Chiapas.

Radford, L. (2005a). Body, Tool, and Symbol: Semiotic Reflections on Cognition. In Simmt 199 E. and Davis B. (Eds.), *Proceedings of the 2004 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, pp. 111-117.

Radford, L. (2005b). ¿Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of Objectification. In Helen L. Chick, Jill L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, University of Melbourne, Australia, Vol. 1, pp. 143-145.

Radford, L. (2006a). The Anthropology of Meaning. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 39-65.

Radford, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial sobre semiótica, cultura y pensamiento matemático (editores invitados: L. Radford & B. D'Amore), pp. 267-299.

Radford, L. (2006c). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, November 9 - 12, Vol. 1, pp. 2-21.

Radford, L. (2008a). The ethics of being and knowing: towards a cultural theory of learning. In Radford L., Schubring G., Seeger F. (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education* (pp. 215-234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2008b). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. En: *ZDM Mathematics Education, 40*, 83-96.

Radford, L. (2009). ''No! He starts walking backwards!'': interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, DOI 10.1007/s11858-009-0173-9.

Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19.

Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2010c). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities, *For the Learning of Mathematics*, *30*(2), 2-7.

Radford, L. (2011). Grade 2 Students´ Non-Symbolic Algebraic Thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization*. *A global dialogue from multiple perspectives*. (pp. 303-322) Berlin: Springer-Verlag.

Radford, L. (2012a). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. *ICME-12 Regular Lecture*. Seoul, South Korea. July 8-15, 2012.

Radford, L. (2012b). On the cognitive, epistemic, and ontological roles of artifacts. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche, (Eds.), *From text to 'lived' resources* (pp. 238-288). New York: Springer.

Radford, L. (2013a). Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. *Journal of Research in Mathematics Education, 2* (1), 7-44. doi: http://doi.dx.org/10.4471/redimat.2013.19

Radford, L. (2013b). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática*. *Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, España: Editorial Comares.

Radford, L., Edwards, L. & Arzarello, F. (2009). Beyond words. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 91 – 95.

Radford, L., Demers, S., Guzmán, J. & Cerulli, M. (2003). "Calculators, Graphs and the Production of Meaning", en N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (eds.), *Proceedings of the 27 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pme27 –pmena25), University of Hawaii, vol. 4, pp. 55-62.

Radford, L. & Demers, S. (2004). Communication et apprentissage. Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques. Ottawa: Centre franco-ontarien des ressources pédagogiques, 206 p.

Radford, L. & Roth, W. M. (2010). Intercorporeality and ethical commitment: an activity perspective on classroom interaction. *Educational Studies in Mathematics*, Online First. Doi 10.1007/s10649- 10010-19282-10641.

Ramos, S. (1936). *El perfil del hombre y la cultura en México*. (15 Ed.). México, D.F.: Espasa-Calpe.

Rancière, J. (1999). *Dis-agreement: Politics and philosophy*. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Ratner, C. (2000). Outline of a coherent, comprehensive concept of culture. The problem of fragmentary notions of culture. *Cross-Cultural Psychology Bulletin*, Trinidad, USA.

Rosch, E. (1975). Universals and cultural specifics in human categorization. En *Cross-Cultural perspectives on learning*, Richard W. Brislin, Stephen Bochner y Walter J. Lonner (Eds.), pp. 177-206. New York, EE.UU.: John Wiley & Sons.

Roth, M. & Radford, L. (2011). *A Cultural-Historical Perspective on Mathematics Teaching and Learning*. Ontario: Sense Publishers.

Rubinstein, S.L. (1966). *El proceso del Pensamiento*. La Habana: Editora Nacional de Cuba.

Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: a comparison between semiotic perspectives*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Bologna, Bologna, Italia.

Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics, 77*, 285–311.

Serfati, M. (1999). La dialectique de l'indéterminé, de viète à frege et russell. In M. Serfati (Ed.), *La recherche de la vérité* (pp. 145- 174). Paris: ACL – Les éditions du kangourou.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, *77*, 5-34.

Soneira, A. J. (2006). “La Teoría fundamentada en los datos de Glaser y Strauss”. En Vasilachis de Gialdino, I. (Coord.). *Estrategias de investigación cualitativa*. (pp. 153-173). Barcelona: Gedisa.

Talizina, N. (2008). Mecanismos psicológicos de la generalización. *Acta Neurol Colomb, 24*(2), Junio Suplemento, (2:1).

Valsiner, J. (2012). “La dialéctica en el estudio del desarrollo”. En: Castorina, J. & Carretero, M. (Comps.). *Desarrollo cognitivo y educación. Procesos del conocimiento y contenidos específicos* (Vol. II). (pp. 139-162). Buenos Aires: Paidós.

Vasco, C. E. (2002). El Pensamiento Variacional, la Modelación y las Nuevas Tecnologías. En *Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá-Colombia.

Vasco, C. E. (2007). “Análisis semiótico del álgebra elemental”. En: Vasco, C.E. y Gómez A. L. (Eds). *Argumentación y semiosis en la didáctica del lenguaje y las matemáticas*. (pp. 107-136). Bogotá: Fondo de Publicaciones Universidad Distrital francisco José de Caldas.

Viète, F. (1983). *The analytic art*. New York: Dover. (Trabajo original publicado en 1591).

Vygotsky, L. (1929). The problem of the cultural development of the child. *Journal of Genetic Psychology*, *36,* 415-434.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA, E.U.: Harvard University Press.

Vygotski, L. (1987). *Historia del desarrollo de las Funciones Psicológicas Superiores*. La Habana: Científico-Técnica.

Vygotski, L. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. México: Grijalbo. Trad. de la versión inglesa, *Mind in Society: The development of higher psycholgical processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press. La Habana: Ed. Científico-Técnica.

Vygotsky, L. (1989). *El proceso de formación de la psicología marxista: L. Vygotsky, A. Leontiev, A. Luria*. URSS: Progreso.

Vygotski, L. S. (2000). *Obras escogidas* (Vol. III) (L. Kuper, Trad.). Madrid: Visor. (Original publicado en 1931).

Vygotski, L. (2007). *Pensamiento y habla* (A. Ariel González, Trad.). Buenos Aires: Ediciones Colihue. (Original publicado en 1934).

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Barcelona: Paidós. Versión original: *Vygotsky and the social formation of mind*, Cambridge: Harvard University Press, 1985.

Wertsch, J. (1991). *Voces de la mente. Un enfoque sociocultural para el estudio de la acción mediada*. Madrid: Visor.

Wertsch, J. (1998). *La mente en acción*. Madrid: Aique.

White, L. A. (1959). The concept of culture. *American Anthropologist, 61*(2), 227-251.

You, H. (1994). Defining rhythm: aspects of an anthropology of rhythm. *Culture, Medicine and Psychiatry, 18*, 361-384.

ANEXO: TRANSCRPICIONES DE LOS VIDEOS Y DELAS ENTREVISTAS FOCALIZADAS

SESIÓN Nº 1. 24 DE ABRIL DE 2012.

Características de transcripción: video 4 24 2012. 10:24 AM. – 11:19 AM.

PROFESORA: [*Mirando al tablero*] En el tablero yo he hecho unos dibujos [señala con la palma de la mano las figuras en el tablero y dirige su mirada a los niños], yo quiero que ustedes miren muy bien esos dibujos y que me digan [*dirigiendo su mirada al tablero*] ¿qué características encuentran ahí? o ¿qué cosas ven ahí? Entonces muy bien, entonces vamos por allá José [*señala a José*] que está levantando la mano [00:01 – 00:13].

JOSE: [*Mirando el tablero*] En el uno [*levanta un dedo indicando "1"*] hay una bola [*dibuja la bola con el dedo*] y en el dos [*levanta dedo índice y corazón*] hay tres [*baja los dedos anteriores y levanta los otros tres dedos*], porque de pa' allá hay dos y de pa' arriba también [*levanta las cejas, como buscando aprobación de la profesora*]. [00:13 – 00:18].

PROFESORA: Ok, entonces miren lo que dice José: que en el uno hay una bola, no las vamos a llamar bolas sino círculos, ¿vale? Que en el uno [*señala la figura 1*] hay una bola y en el dos [*señala la figura 2*] hay tres, ¿listo?... eh, ahora, [*señala a Santiago*] me recuerdas tu nombre… [00:18 – 00:28].

SANTIAGO: Santiago.,

PROFESORA: ¡Santiago!, listo Santiago.

SANTIAGO: Eh, es que parece, en el 2 [*señala las figuras con todos los dedos de la mano derecha*] hay dos bolas abajo y parece que se le montará [*levanta un poco la mano y la baja rápido, simulando estar montando un círculo sobre el otro*] la del 1 encima [*con la otra mano, señala la figura 1 y hace como si la corriera encima de la figura 2*] de la 2… [00:31 – 00:40]

PROFESORA: Ajam bien.

SANTIAGO: … y eso sigue [*hace círculos hacia la derecha con la mano derecha y con la mano izquierda mueve una cartuchera sobre su puesto*] sucesivamente hasta el 4 [00:40 – 00:44].

PROFESORA: Eso sigue sucesivamente hasta el 4. ¿Quién más quiere decirme algo de esa figura? Allá atrás Luis, bien. [00:44 – 00:50].

LUIS: Que si por ejemplo ponemos [*con el dedo índice hace círculos hacia la izquierda*] 3 de ese trozado, [*señala hacia su pupitre y baja la mirada hacia él*] arriba es para de el del medio tenemos que poner 2 [*señala el tablero, acentuando*] [00:52 – 00:57].

PROFESORA: ¿Que si ponemos 3 círculos dónde? porque me perdí. Ven, ven, ven y me señalas. Ah listo, bien, vamos a tratar de hablar más fuerte, listo, porque aquí se pierde la voz, ahora sí cuéntame, ¿qué es lo que me estabas diciendo? 00:57 – 01:11].

LUIS: Que si por ejemplo uno pone el 6, [*con su dedo índice, dibuja círculos de izquierda a derecha en el tablero, debajo de las figuras*] de ahí sacamos el 2, 3, 4, el 5 o el 6… [01:11 – 01:14].

PROFESORA: Ajam.

LUIS: [*pone el dedo índice de la mano izquierda en el tablero, debajo de su otro dedo y traza un camino de abajo hacia arriba con el índice derecho*] arriba tengo que poner, no tengo que poner 6 sino 5. [01:14 – 01:17].

PROFESORA: ¡Ah muy bien! Gracias Luis, ¿alguien más tiene algo que decir? ¿No? ¿De esta figura? … ¿Qué ven de esta figura? A ver, ¿qué ven de raro? ¿Nada? [01:17 – 01:30].

[Varios NIÑOS dan respuestas al tiempo]

SANTIAGO: Que es lo mismo, pero le falta el palito así [*mueve la mano de arriba a abajo*]. [01:31 – 01:35]

PROFESORA: [*Junto al tablero señalando las figuras*] Bueno, listo, entonces vamos a ir mirando esta figura de a poquitos, yo se las voy a explicar, ¿listo? [*Mira las figuras en el tablero por un momento*] Entonces, lo primero que les voy a decir de esta figura es que es una secuencia, [*pone su mano debajo de las figuras en el tablero*] se llama secuencia, ¿listo? Entonces miren, en realidad aquí tengo cuatro figuras [*se retira un poco del tablero y con su índice derecho señala la región de las figuras*]. Esta sería la figura número 1 [*señala con el índice derecho la figura 1*], figura número 2 [*señala con su mano la figura 2*], figura número 3 [*señala con su mano la figura 3*], figura número 4 [*señala con su mano la figura 4*]. Entonces, lo que ustedes escucharon de sus compañeritos, lo que dijo Luis [*indica con la mano dónde está Luis*], lo que dijo Santiago [*indica con la mano dónde está Santiago*], lo que dijo José [*indica con la mano dónde está José*]. Miren, en la primera figura ¿hay cuántos círculos? [01:36 – 02:05].

NIÑOS: ¡uno!

PROFESORA: Uno, [*señala con el marcador la figura 2 y dirige su mirada a los niños*] en la segunda figura ¿hay cuántos círculos? [02:07 – 02:09].

NIÑOS: ¡Tres!

PROFESORA: ¿En la tercera figura? [*Señala con el marcador la figura 3 y dirige su mirada a los niños*].

NIÑOS: ¡Cinco!

PROFESORA: ¿En la cuarta figura? [*Señala con el marcador la figura 4 y dirige su mirada a los niños*]

NIÑOS: ¡Siete!

PROFESORA: Listo, entonces qué ocurre con esto [*señala las figuras, arrastrando su mano de izquierda a derecha cerca del tablero*], entonces por allá eh, Santiago decía: [*imita el movimiento de manos de Santiago, abriendo su mano derecha creando una concavidad hacia el piso y moviéndola de arriba abajo varias veces*] lo que pasa es que eso va como aumentando así sucesivamente. ¿Listo? [*Hace una pausa y mira al tablero, aprieta un poco* *el marcador en su mano*] Bien, miren, quiero que miren también, [*con el marcador apunta hacia las figuras*] observen que tienen, la mayoría de sus compañeros dijeron: [*arquea sus manos y representa el tomar una bola y llevarla encima de otra*] es que es como una bolita que está montada en otra bolita, si, [*señala las figuras en el tablero con el marcador*] si ustedes se fijan la manera como están configuradas [*señala la figura 1, la figura 2 y en la figura 3 hace un círculo señalando su contorno*], es decir, como están puestos los círculos, [*cambiando de mano, señala con su palma izquierda bajo las figuras 4, 2 y 3 y luego lleva su mano de derecha a izquierda indicando todas las figuras*] pues es diferente en cada figura ¿cierto? Entonces, que es lo que nosotros vamos a trabajar hoy y que ¡va a estar bien chévere! Esto. A cada uno de ustedes yo les voy a entregar este material, [*toma una guía y la levanta para mostrarla a los niños*] entonces ¡creo que todo el mundo lo alcanza a ver! ¿Cierto? [*Toma la guía y la ubica debajo de las figuras en el tablero*] El material trae exactamente lo mismo que yo he pintado en el tablero ¿listo? Entonces, [*toma las guías y las comienza a repartir a cada alumno, mientras continúa hablando*] lo primero que vamos a hacer es que yo les entrego a ustedes las guías, van a marcar su nombre, edad, curso, fecha, ¿listo? A cada uno de ustedes y luego, según mis indicaciones, pues continuamos con el trabajo de la clase de hoy [*mientras van recibiendo las guías, los niños van sacando sus lápices*]. [02:17 – 03:12]

Características de transcripción: video 4 24 2012. 10:30 AM. Tiempo [00:00, 15:00]

Tiempo desarrollo de guía [00:00, 01:43]

PROFESORA: Listo, bueno creo que ya la mayoría, listo, entonces para los chicos que ya terminaron, quiero que cuenten cuántos círculos tiene la figura cinco y cuantos círculos tiene la figura seis, y colocar un numerito al lado de la figura, de tal forma que yo pueda mirar, listo, cuentan los círculos que hay en la figura cinco y la cantidad de círculos que hay en la figura seis,… y lo escriben. [*Dirigiéndose a todos*] [01:44, 02:12]

Tiempo de desarrollo de la instrucción dada por la PROFESORA [02:13, 02:25]

JOSÉ: [*Hace una pregunta respecto al punto uno de la guía*, *1. Establece la secuencia hasta la figura 6*]

[*No se escucha claramente la pregunta que realiza el niño a la profesora*] [02:26, 02:30].

PROFESORA: Hay sí muchísimas gracias José, sí, en la guía me preguntan eso, cuántos círculos tiene la figura cinco, cuántos círculos tiene la figura seis. [*Dirigiéndose a todos*] [02:31, 02:39]

Listo, acá escríbeme acá, cuántos círculos hay en la figura cinco, ¡ah es que no lo has terminado!, bueno no,… entonces primero dibuja la figura. [*Explica a uno de los estudiantes*] [02:40, 02:50].

Tiempo desarrollo de guía [02:51, 03:20].

PROFESORA: Ahora, listo, y van a hablar por favor fuertecito pues para que se pueda escuchar, listo, entonces José, por ejemplo, cuéntale a tu compañerita pues tu solución. [*Dirigiéndose a todos*] [03:21, 03:32].

JOSÉ: Pues Adriana mi solución era que el del cinco, [*Apuntando con el lápiz, da un golpe sobre la representación que hizo*] eran cinco acá, [*señala con el lápiz la fila de izquierda a derecha*] y cuatro arriba, [*señala con el lápiz la columna de abajo hacia arriba*] porque si usted suma acá cinco [*señala con el lápiz la fila de izquierda a derecha*] y aquí cinco de pa abajo, [*señala con el lápiz la columna de arriba hacia abajo*] pues dan cinco, o sea nueve, [*Apuntando con el lápiz , da un golpe sobre la representación que hizo*] que son cuatro y cinco.[*señalando con el lápiz la columna y la fila*] [03:33, 03:47].

ADRIANA: Pues yo también puse igual, porque acá también son seis [*señala con el lápiz la fila de izquierda a derecha*] y las cuenta de para abajo también son seis [*señala con el lápiz la columna de arriba hacia abajo*] [03:48, 03:59].

RODOLFO: Cuéntale a tu compañero cómo lo hiciste. [*Dirigiéndose a Adriana Bernal*] [04:00,04:05].

ADRIANA: Je je je. [*Ríe nerviosamente*] [04:06, 04:07].

PROFESORA: A ver Adrianita vamos a mirar, entonces miremos por ejemplo lo que hizo Adriana, listo, [*dirigiéndose al grupo*] entonces Adriana, esta es la figura cinco de Adriana [*señala la figura*] y miremos la tuya José, ¿se parecen o no se parecen? [*Pregunta a Adriana*] [04:08, 04:16].

JOSÉ: [*intercede*] la de acá si [*señala con el lápiz la fig. 5*] pero la de acá no [*señala con el lápiz la fig. 6*] [04:17, 04:19].

PROFESORA: La de acá no, [*señala la fig. 6*] bueno que pasó con la de acá ¿por qué no se parecen? [04:20,04:21].

JOSÉ: Le puso una de más. [*Señala la fig. 6*] [04:22, 04:23].

PROFESORA: A ver, entonces miremos cómo, explícame eso ¿Cómo así que una de más?, o sea que como debería ser la figura. [04:24, 04:26].

ADRIANA: [*Intercede*] porque aquí tiene que quedar tres [*señala con el lápiz los tres primeros círculos de la columna iniciando de abajo hacia arriba*] y aquí tres; seis, [*señala con el lápiz los tres siguientes círculos de la columna de abajo hacia arriba*] y de para acá tres [*señala con el lápiz los primeros tres círculos*] y de tres; seis. [*Señala los círculos horizontales restantes*] [04:27, 04:33]
[*Aclara*] Tiene que quedar de para abajo seis, [*señala con el lápiz la columna de abajo hacia arriba*] y de para acá seis [*señala con el lápiz la fila de izquierda a derecha*]. [04:34, 04:36].

PROFESORA: Bueno, pero Adriana [hace *referencia a Adriana B*] por ejemplo no, no ha entendido y yo tampoco, a ver ¿Por qué?, o sea, explícame ¿por qué, porque aquí?, digamos ¿por qué aquí dibujaste eso? [*Señala la fig. 5*] [04:37, 04:40].

JOSÉ: Porque aquí hay cuatro. [*Señala con el dedo la fila de izquierda a derecha*] [04:41,04:42].

PROFESORA: ¿aquí hay cuatro? [*Señala la fila de la fig. 5*] [04:42, 04:43]

JOSÉ: Aquí hay cinco [*corrige y señala nuevamente la fila de la fig. 5*] y se le suma de pa bajo también hay cinco [*señala la columna de arriba hacia abajo*], y eso que aquí este le suma [*señala con el dedo la circunferencia que está contenida tanto en la fila como en la columna*] y quedan cuatro [*señala las cuatro primeras circunferencias de la columna de arriba hacia abajo*] [04.43, 04:47].

PROFESORA: ah bien, y tú dices que esa es la figura cinco, si, entonces ¿cómo es que tú dices?, tú dices, que aquí suman cinco, [*señala la fila de la fig.5*] y como más suman cinco [04:47, 04:50].

ADRIANA: [*intercede*] así: un, dos, tres, cuatro, cinco, [*cuenta los círculos de las columnas uno por uno de arriba hacia abajo, señalándolos con el lápiz*] y uno, dos, tres, cuatro, cinco. [*Continúa contando con el lápiz los círculos de las filas de izquierda a derecha*] [04:50, 04:53].

PROFESORA: Y tú dices que esa es la figura 5 [*Señalando toda la figura 5*]. Entonces acá la figura seis ¿Qué pasa? [04:53 – 04:56].

ADRIANA: ¿Por qué aquí hay siete [*Señalando la columna de la figura 6*] y aquí hay 6? [*Señalando la fila de la figura 6*], esta es la figura [*Señalando la circunferencia de la intersección de la fila y la columna*] esta bola es la figura, esta bolita que está aquí es la figura [Señalando *la circunferencia de la intersección de la fila y la columna*]. [04:57 – 05:05]

PROFESORA: ¿Esa bolita de ahí es la figura [*Señalando la circunferencia de la intersección de la fila y la columna*]? [05:06 – 05:07]

ADRIANA: Si, por que aquí se suman de por acá [*Señalando la fila de derecha a izquierda de la figura 6*] y de paca [*Señalando la columna de norte a sur de la figura 6*]. [05:08 – 05:11].

PROFESORA: Y tiene que sumar ¿cuánto según tú [*indicando cuántos círculos debe tener la fila y la columna de la figura 6*]? [05:12 – 05:13].

ADRIANA: Seis [05:14].

PROFESORA: ¿Y tienen que sumar seis? A ver, entonces súmalo, súmalo tú, déjame mirar el tuyo. [05:15 – 05:19].

JOSÉ: Vea, 1, 2, 3, 4, 5, 6 [*Señalando la columna de arriba hacia abajo de la figura 6*]. [05:20 – 05:22].

PROFESORA: Ajá vuelve a sumar [*Indicando que sumara la fila de la figura6*]. [5:23]

JOSÉ: 1, 2, 3, 4, 5, 6 [*Señalando la fila de izquierda a derecha de la figura 6]*. [05:24]

PROFESORA: O sea ¿qué tú la vuelves a contar? [*Señalando el circulo de la intersección de la fila y la columna*]. [05:25].

JOSÉ: Si [05:26]

PROFESORA: Entonces tú dices que esta es la figura 6 porque esto suma seis 6 así [*Señalando los círculos de la fila de la figura 6*] y seis así [*Señalando los círculos la columna de la figura 6*] ¿si estás diciendo eso?, [05:27 – 05:33].

JOSÉ: Sí señora. [05:34].

PROFESORA: Ah bueno, y entonces el de Adriana, ¿Qué es lo que pasa con el de Adriana? [05:35 – 05:38].

JOSÉ: Porque vea 1, 2, 3, 4, 5, 6 [*Señalando los círculos de la columna de arriba hacia abajo de la figura 6*] hasta acá [*Señalando el círculo numero 6 de la columna contando de arriba hacia abajo de la figura 6*], entonces no se cuenta este [*indicando que el circulo de la intersección de la fila y la columna de la figura 6 no se cuenta]*. [05:39 – 05:43].

PROFESORA: Ah bueno, ok, y ¿tú qué dices Adrianita? [05:44 – 05:45].

ADRIANA: No sé [05:47].

PROFESORA: ¡No sabes!, bueno entonces listo, eso es por ahora, voy a ir a otro grupo, entonces ahorita quiero, que cuando yo pase por todos los grupos vamos a comentar, esta solución que ustedes han dado, listo. [05:49 – 05:58].

JOSÉ: Si [05:59].

PROFESORA: Listo gracias [06:01].

PROFESORA: Listo a ver Esneider cuéntanos por ejemplo a ver ¿cuál fue tu solución?, explícame las figura 5 [06:03 – 06:06].

ESNEIDER: En la figura cinco me dieron 9 círculos. [06:07 – 06:08].

PROFESORA: En el 5 [*Refiriéndose a la figura 5*] te dieron 9 círculo, en el 5 ¿cómo te dieron esos 9 círculos?, a ver ¿Por qué? [06:09 – 06:12].

ESNEIDER: Eh, porque eh, aquí primero, tiene que ir abajo 5 círculos [*Señalando la fila de la figura 5*] y como en el 4 [*figura 4*] habían 4 círculos abajo [*Señalando la fila de la figura 4*] ahora se le ponen 4 círculos encima [*Señalando los 4 círculos de la columna de la figura 5 contando de arriba hacia abajo*]. [06:13 – 06:22]

PROFESORA: A ver, espérenme un segundito, a ver Esneider tú me dices que aquí hay 5 [*Señalando los círculos de la fila de la figura 5*] porque aquí había cuatro [*Señalando los círculos de la fila de la figura 4*] y que aquí hay 4 [*Señalando los círculos de la columna de la figura 5*] ¿Porqué? [06:23 – 06:34].

ESNEIDER: ehh (…) porque encima del cinco [*Señalando la fila de la figura 5*] se colocan los números anteriores [*Haciendo referencia con su mano a las figuras anteriores*] [06:35 – 06:40].

PROFESORA: ¡Los números anteriores!, ¿cuál sería el número anterior a la figura? [*Señalando la figura 5*] o a ¿qué? [06:41 – 06:45].

SNEIDER: El 4[06:46].

PROFESORA: A ok, entonces explícame este de acá [*Señalando la figura 6*] [06:47 – 06:48].

SNEIDER: Ahí me dio 11 [*11 es el número de círculos en la figura 6*], porque abajo va seis y acá en tres [*Refiriéndose al círculo número 3 de la fila de la figura 6 contando de izquierda a derecha*] va cinco [*Indicando que el circulo 3 de la fila contando de izquierda a derecha se ubican cinco círculos verticalmente, que son la columna de la figura 6*] de la anterior [*Señalando la fila de la figura 5*] [06:49 – 06:59].

PROFESORA: Y tú qué dices, tú ¿qué dices de lo que acaba de decir Sneider? Miremos tu figura, a ver como hiciste, haber explícame tu ¿cómo hiciste tu figura? [06:59 – 07:07].

LAURA: Igual [07:08].

PROFESORA: ¡Igual!, pero explícame con tus propias palabras, ¿Por qué pusiste acá 1, 2, 3, 4? [*Señalando los círculos de la fila de la figura 5*] ¿Por qué pusiste 5 círculos? [07:09 – 07:16].

LAURA: Porque es la figura 5 [07:17].

PROFESORA: ¡Porque es la figura 5!, ah bueno y entonces ¿qué pasa con eso? [07:18 – 07:20].

LAURA: Después encima se le ponen los números anteriores. [07:21 – 07:25].

PROFESORA: ¡Se le ponen los números anteriores! [07:25 – 07:26]

LAURA: Los círculos [*Señala con su dedo índice los círculos de las filas de las figuras 5 y 4*] [07:27]

PROFESORA: Ah o sea que acá es la figura [*Señalando la figura 6*] ¿Qué? [07:28].

LAURA: 6 [07:30].

PROFESORA: Y entonces, ¿cuántos pusiste acá? [*Señalando la fila de la figura 6*] [07:31 – 07:32].

LAURA: 6 [07:33].

PROFESORA: Y ¿cuántos debo poner acá? [*Señalando la Columna de la figura 6*] [07:34 – 07:35].

LAURA: 5 [07:36].

PROFESORA: ¡5! ok. Aquí Sunner tu ¿qué hiciste? [07:37 – 07:39].

SUNNER: Pues lo mismo. Aquí [*Señalando con su dedo índice la figura 1*] yo lo hice de diferente manera. [07:40 – 07:42].

PROFESORA: A ver ¿Cómo? [07:43].

SUNNER: Aquí el rango va subiendo [*Señalando con su dedo índice el incremento de círculos de las columnas de las figuras 1 hasta la 4 contando de izquierda a derecha*] y aquí también [*Señalando con su dedo índice el incremento de círculos de las columnas de las figura 5 y 6 contando de izquierda a derecha*] [07:44].

PROFESORA: Ah, ¡el rango va subiendo! [07:45].

SUNNER: ¡Sí! aquí 1, 2, 3 [*Señalando con su dedo índice la cantidad de círculos que hay en las columnas de las figuras 2 hasta la 4 respectivamente*] entonces aquí ponemos 4 y aquí 5 [*Señalando con su dedo índice la cantidad de círculos que hay en las columnas de las figuras 5 y 6 respectivamente*] [07:46 – 07:52].

PROFESORA: A ver, miremos que esto está chévere lo que dice Sunner. Sunner dice, que ella se fijó en estas bolitas [*Señalando con el lápiz los círculos de las columnas de las figuras 1 hasta la 4 sin contar el circulo de la intersección de la fila y la columna*] que tú dices es el rango. [07:53 – 08:01].

SUNNER: Que van subiendo así [*Señalando con su dedo índice el incremento de círculos de las columnas de las figuras 1 hasta la 4 contando de izquierda a derecha*]. [08:02].

PROFESORA: Ah que van subiendo. Entonces tú dices que acá hay 1 [*Señalando los círculos que hay en la columna de la figura 2, sin contar el circulo de la intersección de la fila y la columna de la figura 2*], acá hay 2 [*Señalando los círculos que hay en la columna de la figura 3, sin contar el circulo de la intersección de la fila y la columna de la figura 3*], acá hay 3 [*Señalando los círculos que hay en la columna de la figura 4, sin contar el circulo de la intersección de la fila y la columna de la figura 4*]. [08:02 – 08:06].

SUNNER: Entonces acá deben ir 4 [*Señalando los círculos que hay en la columna de la figura 5, sin contar el circulo de la intersección de la fila y la columna de la figura 5*] y aquí 5 [*Señalando los círculos que hay en la columna de la figura 6, sin contar el circulo de la intersección de la fila y la columna de la figura* 6] [08:07 – 08:09].

PROFESORA: Ah, y que hiciste con las bolitas de abajo [*Señalando las filas de las figuras5 y 6*] [08:10 – 08:11].

SUNNER: Pues puse, como aquí [*Señalando la fila de la figura 1*] había el número que estaba aquí [*Refiriéndose a que el número que identifica a la figura 1 coincide con la cantidad de círculos que hay en la fila de la figura1 y de igual manera para las figuras 2,3 y 4*] y entonces aquí puse 5 [*Señalando los círculos de la columna de la figura 5*] y acá puse 6 [*Señalando los círculos de la columna de la figura 6*]. [08:12 – 08:16]

PROFESORA: ¿Y nos dio la misma figura? [08:17].

SUNNER: Ajá [08:19].

PROFESORA: O sea que hay tres formas diferentes de construir la figura. Y nos dio igual, cierto, gracias,… bueno hola, entonces como nos fue, entonces vamos a mirar, bueno quiero que miremos el tuyo, bueno entonces Jenny cuéntame ¿Cómo construiste la figura número 5? ¿Qué hiciste? [08:20 – 08:39].

JENNY: Pues como yo vi en esta fotografía, la figura 4 habían 1, 2, 3 y 4 [Contando los círculos de la fila en la figura 4] y entonces como en esta en la figura 3 [*Señalando con su dedo índice los 3 círculos de la fila de la figura 3]*, ya aquí están los tres círculos [*Señalando con su dedo índice que los 3 círculos de la fila en la figura 3 se trasladan para la figura 4 para conformar la columna de esta*], entonces acá yo hice lo mismo en la 6 [*Señalando la figura 6*], conté 6: 1, 2, 3, 4, 5, 6 [*Señalando los círculos de la fila en la figura 6*] y el numero anterior que era 5 [*Señalando los círculos de la fila en la figura 5*] lo coloque aquí [*Señalando los círculos de la columna de la figura 6*]. [08:40 – 08:59].

PROFESORA: Y entonces ¿cómo construiste este? [*Señalando la figura 5*]. [09:00].

JENNY: ¡El 5! Pues lo mismo pero con el cuatro, 5 acá [*Señalando los círculos de la fila de la figura5*] y 4 acá [*Señalando los círculos de la columna de la figura5 sin* *tener en cuenta el círculo de la intersección entre la fila y la columna*]. [09:02 – 09:08]

PROFESORA: Ah bien, vamos a ver Jennifer tu ¿cómo construiste este? [*Señalando la figura 5*] [09:09 – 09:12].

JENNIFER: Mirando la figura 4 con la 3. La figura 4 tiene 4 círculos abajo (*Señalando con su dedo índice los círculos de la fila de la figura 4*) y este [*Refiriéndose a la figura4*] le quita los círculos [*Los círculos que hay en la fila de la figura 3*] y se los pone aquí arriba [*Señalando con su dedo índice los 3 círculos de la columna de la figura 4 contando de arriba hacia abajo*] [09:13 – 09:]

PROFESORA: Ah tu utilizaste estos [Señalando los círculos de la fila de la figura3] y los pusiste acá [Señalando los círculos de la columna de la figura 4]. [09:26 – 09:27].

JENNIFER: Sí, y acá puse 5 círculos [*Señalando con su dedo índice los círculos de la fila de la figura 5*] y digamos que le quite estos 4 circulo [*Señalando con su dedo índice los círculos de la fila de la figura 4*] y se los puse de para bajo [Señalando con su dedo índice los círculos de la columna de la figura5]. [09:28 – 09:37].

PROFESORA: Y ¿Cómo hiciste esta? [*Señalando la figura6*]. [09:38 – 09:39]

JENNIFER: Esta [*Señalando con su dedo índice la figura 6*], coloque 6 círculos abajo [*Señalando con su dedo índice los círculos de la fila de la figura 6*] y le quite los 5 círculos a este [*Señalando con su dedo índice los círculos de la filia de la figura 5*] y se los puse ahí [*Señalando con su dedo índice los círculos de la columna de la figura 6*]. [09:40 – 09:46]

PROFESORA: Y tú Yaneth, ¿cómo hiciste?, cuéntanos. [09:47 – 09:49]

YANETH: Bueno mirando las figuras, se veía que el 1 [*Señalando con su dedo índice el círculo de la figura1*] se pasaba para el 2 [*Señalando con su dedo índice el primer círculo de la columna de la figura 2, contando de arriba hacia abajo*] entonces acá [*Señalando con su dedo índice la figura 5*] yo hice lo mismo, puse el 5 [*Señalando con su dedo índice los círculos de la fila de la figura 5*] y puse el 4 acá [Señalando con su dedo índice los círculos de la columna de la figura 5], y acá [*Señalando con su dedo índice la figura 6*] puse el 6 [*Señalando los círculos de la fila de la figura 6*] y acá el 5 [*Señalando los círculos de la columna de la figura 6*]. [09:50 – 10:02]

PROFESORA: Explícame eso que el 1 se pasó para acá, o sea que ¿este 1 [*Señalando el círculo de la figura 1*] se pasó para acá? [*Señalando el primer círculo de la columna de la figura 2, contando de arriba hacia abajo*]. [10:03 – 10:09]

YANETHH: Si [10:08]

PROFESORA: ah, y aquí [*Señalando figura 2*] ¿cuáles pasaste para allá [*Señalando la figura3*]? [10:09 – 10:10]

YANETHH: Estos [*Señalando con su dedo índice los círculos de la fila de la figura2*] los pasé para allá [Señalando con su dedo índice los círculos de la columna de la figura3]. [10:11 – 10:13]

PROFESORA: Y ¿éstas [Señalando los círculos de la fila de la figura 3] a dónde las pasaste? [10:14]

YANETHH: Para el 4 [*Señalando los círculos de la columna de la figura 4*] [10:15]

PROFESORA: O sea que yo paso los círculos de una figura a la siguiente figura, ¿sí?, [10:17 – 10:18]

RODOLFO V: O sea, tu pasaste estos tres [*Señalando los círculos de la fila de la figura 3*] para ¿Dónde hija? [10:19 – 10:24]

YANETHH: Para el 4 [*Señalando con su dedo índice los círculos de la columna de la figura4*] [10:25]

PROFESORA: O sea que estos 5 [*Señalando los círculos de la fila de la figura* 5] yo los paso para ¿Dónde? [10:26 – 10:28]

YANETHH: Para el 6 [Señalando con su dedo índice los círculos de la columna de la figura 6] [10:29 – 10:30].

PROFESORA: Ah bien Yaneth, muy bien, muchas gracias, listo… [10:31 – 10:40]

PROFESORA: Entonces vamos a ver cómo nos fue, entonces aquí tenemos a Santiago, Lorena y Héctor, entonces bien Santiago explícame ¿cómo construiste la figura 5? [10:41 – 10:49]

SANTIAGO: Mirando la secuencia del 1 hasta el 4 [*Señalando con su dedo índice de izquierda a derecha las figuras del 1 al 4*], pensé que le debía hacer una bolita más a este lado [*Indicando con su dedo índice el último circulo de la fila contando de izquierda a derecha de la figura 5*] y otro circulo más arriba [*Señalando con su dedo índice el tercer círculo de la columna contando de arriba hacia abajo de la figura 5*] y lo mismo hice con este [*Señalando con su dedo índice la figura 6*] pero a este le sume otro circulo [*Señalando con la mano que agrega otro circulo a la fila de la figura 6 contando de izquierda a derecha*] y otro círculo arriba [*Señalando con la mano que agrega otro circulo la columna de la figura 6 contando de abajo hacia arriba*]. Y este pareciera [*Indicando con su mano la figura 6*] que del 4 [*Señalando con su mano la figura 4*] se le sube dos y dos [*Señalando con su dedo índice los dos último círculos de la fila contando de izquierda a derecha de la figura 6 y los dos primeros círculos de la columna contando de arriba hacia abajo de la figura 6*]. [10:50 – 11:10]

PROFESORA: O sea que tu construiste estas dos [*Señalando las figuras 5 y 6*] mirando esta [*Señalando la figura 4*]. [11:11 – 11:12]

SANTIAGO: Sí [11:13]

PROFESORA: Si [11:13]

SANTIAGO: Si y mirando esta, la secuencia de abajo [*Señalando con su dedo índice la fila de las figuras del 1 al 4 contando de izquierda a derecha*]. [11:14 – 11:15]

PROFESORA: ¡Si y mirando estas de acá! ¿Y tu puedes construir esta [*Señalando con su dedo índice la figura 6*] mirando esta? [*Señalando con su dedo índice la figura 5*]. [11:16 – 11:17]

SANTIAGO: ¿Ésta [*Señalando con su dedo índice la figura 6*] mirando ésta? [*Señalando con su dedo índice la figura 5*] [11:18 – 11:19]

PROFESORA: ¡Sí! [11:20]

SANTIAGO: Sí, también se puede. [11:21]:

PROFESORA: ¿Cómo? [11:21]

SANTIAGO: Ésta [*Señalando con su dedo índice la figura 5*] la puedo convertir en una de estas [*Señalando con su dedo índice la figura 6*], si le pongo un círculo de estos más arriba [*Indicando con su dedo índice que agrega un círculo a la columna contando de arriba hacia abajo de la figura 5*] y otra acá [*Indicando con su dedo índice que agrega un círculo a la fila contando de izquierda a derecha de la figura 5*]. [11:22 – 11:28]

PROFESORA: Ah bien, y entonces a ver Héctor cuéntanos cómo hiciste la figura 5 [11:29 – 11:34]

HÉCTOR: Ah estuve yo también mirando la secuencia 4 [*Señalando con su mano la figura 4*], entonces yo imaginé que tendría que ir otro número más acá [*Indicando con su dedo índice la figura 5*], 5 de para acá [*Indicando con su dedo índice la columna contando de arriba hacia abajo de la figura 5*] y 5 de para acá [*Indicando con su dedo índice derecho la fila contando de izquierda a derecha de la figura 5*]. [11:29 – 11:46]

PROFESORA: Ah, a ver ¿cómo es lo de los 5?, ¿cuéntame eso de los 5? Que no las veo, ¿Cuáles 5? [11:47 – 11:49]

HÉCTOR: 1, 2, 3, 4 y 5 [*Indicando con su dedo índice cada una de los círculos de la columna contando de arriba hacia abajo de la figura 5*]. [11:50 – 11:52]

PROFESORA: ¿Y? [11:53]

HÉCTOR: 1, 2, 3, 4 y 5 [*Indicando con su dedo índice cada uno de los círculos de la fila contando de izquierda a derecha de la figura 5*]. [11:54 – 11:55]

PROFESORA: O sea que ¿Cuántos círculos tienes ahí? [*Indicando con su dedo índice la figura 5*] ¿Tienes 10 círculos? seguro. [11:56 – 11:58]

HÉCTOR: ¡sí! [*En un tono no muy seguro*][11:59]

PROFESORA: Seguro [11:59]

SANTIAGO: ¡No, 9! [12:00]

HÉCTOR. No, no señora 9 [12:00]

PROFESORA: Y ¿Por qué hay 5 y 5? [*Indicando con su dedo índice la fila y la columna de la figura 5*] [12:01 – 12:02]

SANTIAGO: Él las cuenta como así [12:03]

PROFESORA: Estás contando… [*Indicando con su dedo índice el círculo de la intersección entre la fila y la columna de la figura 5*]. [12:04]

HÉCTOR: Porque estoy contando este. [*Indicando con su dedo índice el círculo de la intersección entre la fila y la columna de la figura 5*] [12:05 – 12:06]

PROFESORA: (…) Este dos veces [*Señalando con su dedo índice el círculo de intersección entre la fila y la columna de la figura 5*], a listo, bien, entonces explícame ¿Cómo construiste la figura 6? [12:07 – 12:12]

HÉCTOR: Porque yo mire la 5 [*Refiriéndose a la figura 5*] y dije no tengo que aumentarle otro número, para que sea 6 y no 5 [*Refiriéndose a la figura 6 y 5*] y entonces así. [12:13 – 12:22]

PROFESORA: ¿Así lo hiciste? [12:23]

HÉCTOR: Si señora [12:24]

PROFESORA: Ah bueno, y a ti por ejemplo ¿qué te hizo pensar que aquí iban 5? [*Señalando con su dedo índice la columna de la figura 5*] [12:25]

HÉCTOR: Ah, Porque miré la secuencia 4 y entonces miré que acá habían 4 círculos [*Señalando con su dedo índice los círculos de la fila de la figura 4*], entonces miré que estas también, [*Indicando con su dedo índice cada una de las filas de las figuras del 1 al 3 contando de derecha a izquierda*] entonces dije, esta acá tengo que aumentarle un número más. [*Señalando con su dedo índice la fila de la figura 5*] [12:26 – 12:39]

PROFESORA: Ah, bien, listo y tú Lorenita cuéntanos, ¿cómo la construiste? Si dale yo sé que tú puedes contarme, entonces por ejemplo tú aquí [12:40 – 12:52]

SANTIAGO: Es que ella es nerviosa. [12:53]

PROFESORA: Sí, Lorenita es nerviosa, miremos el ejercicio de Lorena, ayuda Santiago, entonces Lorena aquí ¿Cuántos círculos puso? [*Señalando con su dedo índice los círculos de la fila de la figura 5*]. (…)Listo Lorena, entonces vamos a mirar todos la solución de Lorena esta es la figura 5 y la figura 6 [*Señalando con su dedo índice los circulo de la fila de la figura 5 y 6*] de Lorena, entonces Lorena a ver ¿cuántos círculos puso aquí horizontal? ¿Cuántos? [12:54 – 13:11]

LORENA: 5 [13:12]

PROFESORA: 5 listo, ¿Por qué pusiste 5? ¿Por qué? ¿Qué estás mirando? Dime qué estás mirando ¡Yo quiero saber! No, Santiago dime tú a ver ¿Por qué ella puso 5? [13:13 – 13:28]

SANTIAGO: Por la secuencia. [13:29]

PROFESORA: Mm por la secuencia listo, a ver Lorena ¿cuántos pusiste? aquí pusiste 5 [*Señalando con su dedo índice los círculos de la fila de la figura 5*] ¿Cuántos pusiste aquí hacia arriba? [*Señalando con su dedo índice los circulo de la columna de la figura 5*] [13:31 – 13:36]

LORENA: 4 [13:37]

PROFESORA: 4, ¿Por qué pusiste 4? [13:38 – 13:40]

LORENA: Porque aquí, aquí estaban 3 [*Señalando con su dedo índice los círculos de la fila de la figura 5*] [13:41 – 13:45]

PROFESORA: Porque ahí habían 3 aja [13:46]

LORENA: Porque estos se montaron aquí. [*Señalando con su dedo índice que los circulo de la fila de la figura 3 se trasladaron para la columna de la figura 4*] [13:47 – 13:48]

PROFESORA: Ah montaste los 3 acá ah muy bien, ¿entonces? [13:49 – 13:50].

LORENA: Entonces acá [*Indicando con su dedo índice los círculos de la fila de la figura 5*] le monte los 4 [*Señalando los circulo de la fila de la figura 4*] [13:51 – 13:52]

PROFESORA: Los 4, aja [13:53]

LORENA: Los 4 que había acá, [*Señalando los círculos de la fila de la figura 4*] se los monte acá. [*Señalando con su dedo índice los circulo de la columna de la figura 5*] [13:54 – 13:56]

PROFESORA: Miren lo que ella está haciendo, o sea que está tomando estos 4 [*Señalando los círculos de la fila de la figura 4*] y los está subiendo acá [*Señalando con su dedo índice los circulo de la columna de la figura 5*] muy bien y acá en el 6 [Señalando la figura 6] ¿Qué hiciste? [13:57 – 14:02]

LORENA: Acá puse 6 [*Señalando los círculos de la fila de la figura 6*] y como acá habían 5 [*Señalando los círculos de la fila de la figura 5*] le puse aquí los 5 [*Señalando con su dedo índice los circulo de la columna de la figura 6 contando de arriba hacia abajo*]. [14:03 – 14:10]

PROFESORA: 5 ah listo, muchas gracias, ¿Estamos de acuerdo con la respuesta de Lorena?, [14:11 – 14:13]

NIÑOS: Si [14:14]

PROFESORA: Ok, muchas gracias, listo. ¿Cómo nos fue? ¿tú la tenías así para que no se te copiaran? Ja ja ja [*Refiriéndose a que las hojas estaban giradas y no se veía la solución del ejercicio]*. [14:15 – 14:22]

NIÑOS: No profe. , ya habíamos comparado [14:23 – 14:24]

PROFESORA: ¡Ya habían comparado! Y que han encontrado, ¿Cómo les fue? ¿A todos les dio lo mismo o les dio diferente? [14:25 – 27]

NIÑOS: No, igual. [14:28]

PROFESORA: ¡Les dio igual!, a ver entonces cuéntame tú Luis, ¿cómo construiste esta figura? [*Señalando la figura 5*] [14:29 – 14:32]

LUIS: Ah pues como esta era la figura 5 [*Señalando la figura 5*] yo puse 5 bolitas acá y a este 5 [*Refiriéndose al número que identifica la figura y se encuentra en la parte inferior de la figura*] le reste 1 y como me dio 4 y el 4 lo pongo acá [*Señalando con el lápiz los círculos de la columna de la figura 5 contando de arriba hacia abajo*] arriba en bolitas. [14:33 – 14:44]

PROFESORA: Y a ti ¿Qué te hizo pensar que aquí iban 5? [*Señalando los círculos de la fila de la figura 5*]. [14:45 – 14:47]

LUIS: Pues como aquí iban 1 en la primera base [*Señalando el círculos de la fila de la figura 1*], y aquí iban 2 [*Señalando los círculos de la fila de la figura 2*] y aquí iban 3 [*Señalando los círculos de la fila de la figura 3*] porque esta es la figura 3 y acá 4 [*Señalando los círculos de la fila de la figura 4*] en la figura 4 y entonces acá van 5 [*Señalando los círculos de la fila de la figura 5*] [14:48 – 14:58]

PROFESORA: Y bueno, que te hizo pensar ¿qué restaras 1? [14:59 – 15:02]

LUIS: Igual que acá [*señala la fig. 2 con el lápiz*] [15:03, 15:05]

PROFESORA: igual que acá, ¿Por qué? Explícame, explícame [15:06, 15:08]

LUIS: Por ejemplo, el dos acá tiene dos, [*señala la fig. 2, con el lápiz simulando encerrar toda la fila con un circulo realizado en dirección contraria a las manecillas del reloj*] entonces le resta uno y queda uno y el uno se le pone acá arriba [*señala con el lápiz el circulo que se encuentra encima de la fila de la fig. 2*] [15:08, 15:14]

PROFESORA: ¡Ah ya! ¿Y aquí también pasa lo mismo? [15:15, 15:17]

LUIS: Sí señora, acá está el tres [*señala la fig. 3, con el lápiz simulando encerrar toda la fila con un circulo realizado en dirección contraria a las manecillas del reloj*] le resto uno y queda convertido en dos y queda dos acá [*señala cada uno de los dos círculos que se encuentran encima de la fila de arriba hacia abajo*] [15:18, 15:24]

PROFESORA: Umm y acá pasa lo mismo niños, ¿seguro? [*Señala la fig. 4, dirigiéndose a todo el grupo*] [15:25, 15:26]

[*Todos responden en coro !si!...*]

PROFESORA: A ver ¿qué pasa? [15:26, 15:28]

LUIS: uno, dos tres cuatro, [*cuenta señalando con el lápiz cada uno de los círculos de la fila de izquierda a derecha*] y le resto uno, quedan uno, dos, tres. [*Cuenta señalando con el lápiz los círculos ubicados encima de la fila de arriba hacia abajo*] [15:28, 15:31]

PROFESORA: Ah, si da, bien. Y acá en esta figura, ¿cómo construiste esa figura así? [*Señala la fig. 6*][15:31, 15:33]

LUIS: Igual [15:33, 15:34]

PROFESORA: ¿Igual? Entonces como, explícame. [15:34, 15:35]

LUIS: Puse seis acá, seis bolitas [*señala simulando dibujar cada uno de los círculos de la fila de izquierda a derecha*] y a este seis [*señala con el lápiz el número 6 que escribió debajo de la figura*] también le reste uno. [15:35, 15:38]

PROFESORA: Le restaste uno [15:39, 15:40].

LUIS: Como quedo convertido en cinco, puse, el cinco lo reemplace por bolitas y puse uno, dos, tres, cuatro y cinco bolitas, ¡ya! [*Señala con el lápiz simulando dibujar cada uno de los círculos que se encuentran encima de la fila de abajo hacia arriba*] [15:41, 15:46].

PROFESORA: ¡Ah muy bien! Y ustedes acá cómo lo construyeron igual o diferente [*se dirige a los integrantes del grupo de Luis*] [15:47, 15:50].

[*Todos responden: sí, algunos con la cabeza*].

PROFESORA: Sí ¿igual?, lo mismo, o sea ¿por qué pusiste cinco acá? [Se dirige a Jimmy] [15:51, 15:53].

JIMMY: Je je [ríe nerviosamente] ¿cinco? [15:54, 15:56].

PROFESORA: Sí [15:57].

JIMMY: Porque aquí, porque aquí decía que le pusiera la figura cinco y la figura seis [señala con la mano las figuras 1, 2, 3, y 4] y puse el cinco ahí,… y también le reste uno [*responde con tono muy bajo, mueve los brazos hacia atrás y la cabeza hacia el lado izquierdo*] [15:58, 16:03].

PROFESORA: ¿Y también qué? [16:03, 16:04].

JIMMY: Le resté uno [16:05, 16:06].

PROFESORA: le restaste uno, bien. Y tú ¿cómo construiste la figura cinco? [16:07, 16:08]

KEVIN: pues como acá había dos, entonces ponía dos [*señala la fig. 2 con la mano*] y acá había cinco, entonces cinco le tocaba restar uno [señala la fig.5 con la mano] entonces acá era cuatro [señala la columna con el índice de arriba hacia abajo] [16:08, 16:18].

PROFESORA: Umm [16:19].

KEVIN: Acá igual [señala con la mano la fig. 6] [16:19, 16:21].

PROFESORA: O sea que todos hicieron la misma regla de construcción, ¡bien! [16:22, 16:26].

JIMMY: Yo no lo coloree [16:26]

PROFESORA: Ah tú no lo coloreaste, esa es la diferencia, ja ja ja. Si tienes razón. [16:26, 16:30].

[*Corte video*]

PROFESORA: Es decir no existía una única manera de construirlo. [*Dirigiéndose a todos*] [16:30, 16:40].

LUIS: [R*ealiza la construcción en el tablero*, *dibuja cinco círculos de izquierda a derecha para la fila y luego continua dibujando cuatro círculos para la columna de abajo hacia arriba, (la columna la ubica encima del círculo central de la fila y los círculos los realiza en dirección contraria a las manecillas del reloj)*] [16:40, 16:50].

PROFESORA: Estamos construyendo la figura número cinco [*dirigiéndose a todos*] [16:50, 16:51].

Listo, entonces bueno vamos a ponerle aquí un cinco [*señala debajo de la figura que se dibujó en el tablero*] para que tus compañeritos identifiquen que esa es la figura número cinco [*dirigiéndose a Luis*] [16:52, 16:55]

Entonces bien chicos, miren esto, entonces Luis nos va explicar, tienes que hablar muy fuerte para que tus compañeros escuchen listo, ¿cómo construiste esa figura número cinco? [*Dirige la pregunta a Luis*] entonces, explícanos. [16:56, 17:06].

LUIS: Eh (…) como acá hay cinco, este número me indica que acá debo de poner cinco, [*señala con el marcador el número cinco simulando encerrar el número con* *una circunferencia en sentido contrario a las manecillas del reloj*] entonces cinco [*luego señala la fila con el marcador de izquierda a derecha*] y al cinco le resto uno y como queda convertido en cuatro [*señalando con el marcador la fila y el numero 5*] pues pongo cuatro bolas de pa' arriba [*señala con el marcador dando golpes sobre cada uno de los círculos ubicados encima de la fila de abajo hacia arriba*] [17:06, 17:16].

PROFESORA: ¿Sí escucharon? [17:17].

[*¡No!, responden la mayoría*] [17:18].

PROFESORA: Listo, entonces dale [*haciendo referencia de que Luis vuelva a explicar*] [17:19, 17:22].

LUIS: Que como este número que esta acá [*señala con el marcador el numero 5 simulando encerrar el número con una circunferencia en sentido contrario a las manecillas del reloj*] me indica que tengo que poner cinco acá, entonces cinco [*señala con el marcador la fila de izquierda a derecha*] y este cinco le resto una [*señala con el marcador dando pequeños golpes en el número cinco*] y quedo convertido en cuatro, entonces como quedo convertido en cuatro entonces le puse un, dos, tres y cuatro [*señala con el marcador dando golpes sobre cada uno de los círculos ubicados encima de la fila de abajo hacia arriba*] [17:23, 17:36].

PROFESORA: Listo, entonces miren, Luis lo que me dice es lo siguiente, listo, él dice, pues yo puse cinco porque esta era la figura cinco [*señala la figura con el marcador*] y luego a este le disminuí una y me dio cuatro [*señala con el marcador el numero 5*] y por eso puse cuatro [*señala con el marcador los círculos que se encuentran encima de la fila*] ¿cierto? [17:37, 17:49].

LUIS: [A*firma con la cabeza que sí*] [17:50].

PROFESORA: Pero Luis ¿Por qué?, te vuelvo a hacer la pregunta ¿Por qué sabias que aquí habían cinco? [*Señala con la fila de la fig. 5*] [17:51, 17:55].

LUIS: Como era la figura cinco entonces tengo que poner cinco, si fuera la figura tres [*señala con el marcador la fig.3*] acá tenía que poner tres [*señala con el marcador la fila de la fig.3 de izquierda a derecha*] [17:55, 18:02].

PROFESORA: ¡Ah ya! entonces a ver devolvámonos en las figuras de acá [*haciendo referencia a las figuras 1, 2, 3 y 4*] o sea ¿qué era lo que pasaba?, o sea tu decías que como acá hay tres [*señala el número de la fig. 3*] entonces acá tengo que poner tres [*señala la fila de la fig.3*] ¿cierto?, entonces miren, la regla de construcción de Luis fue la siguiente [*dirigiéndose a todos*], tú me dices si es verdad o si estoy diciendo mentiras,[*dirigiéndose a Luis*] o sea lo que yo te entiendo, como aquí era la figura uno pongo uno [*señala la fig.1*], como aquí era la figura dos, pongo dos acá [*señala el número de la fig. 2 y luego señala la fila*], ¿sí? , como aquí era la figura tres pongo tres acá [*señala el número de la fig. 3 y luego señala la fila*], cuatro acá, cinco acá [*señala la fila de la fig. 4 y* *fig.5*]. Entonces ¿en la figura seis cuantos voy a poner? [*Dirigiéndose a todos*] [18:03, 18:27].

[*Todos responden en coro: seis*] [18:28]

PROFESORA: Seis, listo. Ahora que hago con las de acá [*señala los círculos que se encuentran ubicados encima de la fila, fig.5*] [18:29, 18:33].

LUIS: Por ejemplo, acá era el dos [*señala con el marcador la fig.2*] y al dos siempre tengo que al número de abajo le resto, le tengo que restar uno [*señala con el marcador el numero 5*] y ahí el número que me de acá, arriba [*señala el circulo que está encima de la fila*] [18:34, 18:43].

PROFESORA: Y acá, es tres y entonces que pasa [*señala el número 3 de la fig.3*] [18:44, 18:46].

LUIS: En tres, también le resto una y queda convertido en dos, entonces… [*No se escucha con claridad lo que dice*] [18:47, 18:51].

PROFESORA: Entonces miren lo que está haciendo Luis, entonces les dice, a listo, entonces ya sabemos cuántas van en este sentido, horizontal [*señala con la mano la forma horizontal*] entonces las que venían verticales, dice pues les estoy restando, a dos le resto una me da una, a tres le resto una me dan dos, a cuatro le resto una me dan tres, a cinco le resto una y me dan cuatro [*señala el número de cada figura seguidamente los círculos que se encuentran encima de la fila, para cada caso*] ¿sí? van a alzar la manito los estudiantes que también construyeron así, que pensaron de igual forma, [*dirigiéndose a todos*] listo, entonces muy bien, Sunner lo hizo diferente, entonces Sunner nos va a contar como hizo la figura número cinco [18:52, 19:26]
Porque tú no alzaste la mano, entonces tú lo hiciste diferente, [*dirigiéndose a Sunner*] entonces otra vez vamos a pintar acá, [*señala el tablero*] pinta la figura número cinco y horita nos explicas como fue que se construyó. [19:27, 19:35]
Listo, entonces colócale acá un cinco para que todos sepamos que es cinco. Entonces ahora vas a hablar muy duro Sunner porque yo sé que tú hablas bien duro, entonces les vas a contar a tus compañeros cómo fue que lo construiste ¿cómo lo construiste? [19:47, 19:57].

SUNNER: [...] Eh, por la (*...)* por acá [*señalando con el marcador la figura 1*], es que mire, como aquí va uno, va haciendo así [*señala con el marcador el círculo de arriba en la figura 2*], uno, aquí dos [*señala con el marcador el círculo de arriba en la figura 3*] y va subiendo cada uno más [*arrastra el marcador desde el círculo de la figura 1 hasta el círculo de arriba en la figura 3*], entonces aquí uno va subiendo así [*arrastra el marcador en diagonal, de la izquierda abajo, hasta la derecha arriba en la figura 6*], como una pirámide [*une las puntas de los dedos formando un triángulo*]… [19:58 – 20:11].

PROFESORA: ¡Como una pirámide! Miren lo que está diciendo Sunner, o sea, ella dice: lo que pasa es que las que van aquí van subiendo como una pirámide, ¿si?, entonces dale, sígueme explicando. [20:11 – 20:18].

SUNNER: Bueno, aquí va subiendo así [*arrastra el marcador de la esquina inferior izquierda de las figuras, hasta la esquina superior derecha*], así, entonces aquí, aquí puse cinco [*señala con el marcador la fila de la figura 6*] por […] porque es que, aquí por, porque acá va una [*indica con el marcador la figura 1*], aquí dos [*señala con el marcador, primero la parte inferior de la figura 2 y luego la parte superior*] y aquí tres [*señala con el marcador, primero la parte inferior de la figura 3 y luego la parte superior*], y aquí va cinco [*señala con el marcador, primero la parte inferior de la figura 5 y luego la parte superior*], ¿si? [20:18 – 20:31].

PROFESORA: Listo, ¿y las de arriba? ¿Cuántas sabías que iban arriba? [20:32 – 20:34]

SUNNER: [...] Cuatro.

PROFESORA: ¿Por qué?

SUNNER: Porque aquí había tres [*señala con el marcador la figura 4*] y acá va cuatro [*señala con el marcador la figura 5*].

PROFESORA: ¿Sí? ¿De acuerdo?

NIÑOS: Sí.

PROFESORA: ¿Sí? listo, ¿alguien tiene una regla de construcción diferente? [...] ¿La construiste diferente? [20:40 – 20:44].

NIÑO: No.

PROFESORA: ¿No? Bueno, [...], no, ¿seguro? [...] bueno, entonces se van a, vas a sentarte un momentito, por ahí, cuando yo pasé hace un rato por las mesas alguien me dijo lo siguiente, entonces, van a alzar la mano los chicos que me dijeron lo siguiente, miren, alguien me dijo a mí, yo recuerdo que alguien me dijo lo siguiente, me dijo: mira, [*indica con el dedo los círculos de la fila de la figura 5, de izquierda a derecha*] aquí hay cinco, ¡a! ya me acorde quien, tú [*sonriéndole a Yaneth*], ja ja ja, ¿listo?, Yaneth, entonces, bien, la explicación de Yaneth. [*Tropieza con Yaneth*] ¡Ay perdón Yaneth! Entonces Yaneth nos va a explicar ¿listo? Tu figura es igual a esta [*señala con la palma de la mano la figura 5*], pero explícanos, por ejemplo, porque aquí hay cinco [*señala con el dedo la fila en la figura 5*] y porque aquí hay cuatro [*señala con el dedo la columna en la figura 5*], explícanos [20:47 – 21:26]

YANETH: Porque (...*)* en el (…) cuatro [con el marcador señala la figura 4] [...] hay [...] mm no [*aleja el marcador un poco del tablero y lo dirige a la figura 1*], es que acá en el uno [*toca el círculo de la figura 1 con el marcador*], en el uno parece como si se estuviera subiéndose en el dos [*lleva el marcador a tocar el círculo superior de la figura 2*] y en el dos, del dos [*toca el círculo de la figura 2 con el marcador*] ah está subiendo al tres [*señala la figura 3*] y del tres hasta el cuatro, entonces acá [21:26 – 21:43].

PROFESORA: Hasta aquí, espérame un segundito, un segundito porque, a ver si tus compañeritos, a ver si todos estamos entendiendo lo mismo, ¿listo? Miren lo que hizo Yaneth, o sea, ya pasaron dos de sus compañeros a decirnos como la construyeron, Yaneth dice: es que mire, es que de aquí [*indicando la figura 1*] a aquí [*indicando la figura 2*] yo estoy pasando un círculo arriba, [*haciendo curvatura con la mano muestra cómo lleva un círculo de la figura 1 a la 2*] de aquí [*indicando la figura 2*] a aquí [*indicando la figura 3*] estoy pasando dos al otro lado [*haciendo curvatura con la mano muestra cómo lleva un círculo de la figura 2 a la 3*] ¿sí? Y entonces ahora sí, explícame la cinco [21:43 – 22:04].

YANETH: Pues (*...)* como acá había cuatro [indicando con el marcador la figura 4] y acá (…) hay cinco [*indicando con el marcador la figura 5*] pues le, la cuatro [indicando con el marcador la figura 4] [...] la ponen acá [*señala la columna de la figura de arriba abajo*] en la cinco [*señala la columna de la figura de arriba abajo*], encima de la cinco. [22:04 – 22:13].

PROFESORA: Entonces muy bien Yaneth, o sea que aquí en la figura número seis [*señalando un espacio en blanco en el tablero*] ¿cuántos habrían aquí? [*Señalando con el marcador un espacio en blanco en el tablero de izquierda a derecha*] ¿Cuántos? ¿Cuántos círculos? [22:13 – 22:18].

YANETH: Abajo serían seis y arriba cinco [22:18 – 22:21].

PROFESORA: ¡Cinco!, porque ella lo que está tomando es los círculos de la figura anterior y [*mueve la mano de abajo hacia arriba*] los está poniendo en la siguiente figura, ¿listo? Bien, ¡a tú! Dime José. Si, ¿tú quieres pasar? Ven, pasa. [22:21 – 22:35].

PROFESORA: Entonces ahora José [22:40 – 22:43].

JOSÉ: Profe, por aquí en el uno [*señala con el dedo la figura 1*] hay cero [*indicando el círculo de la figura 1*], porque es el uno, un círculo [*hace círculos con el dedo*] porque solo hay uno. En cambio aquí en el dos [*señala con el dedo la figura 2*] hay tres, porque si usted suma aquí [*indicando el círculo inferior derecho de la figura 2*] y con éste [indicando *el círculo de arriba de la figura 2*] dan dos y éste con éste [*indicando los círculos inferior izquierdo y el de arriba de la figura 2*] dan dos y éste con éste [*indicando los dos círculos de abajo de la figura 2*] dan dos. [22:43 - 22:53].

PROFESORA: Muy bien, y el tres, a ver explícame el tres.

JOSÉ: Pues, que en el tres aquí hay [*se ríe*] aquí hay tres círculos [*señala la fila de la figura 3, de izquierda a derecha*] y aquí hay dos [*señala la columna de la figura 3 de arriba abajo*], sin contar éste [*indicando el círculo común entre la fila y la columna*] [22:56 – 23:02].

PROFESORA: Sin contar ese.

JOSÉ: Pero entonces si lo cuento también hay tres [*señala la columna de la figura 3 de arriba hacia abajo*], entonces hay tres [*Señala la fila de la figura 3 de izquierda a derecha*] [23:03 – 23:07].

PROFESORA: Ah, listo entonces explícame el cuatro.

JOSÉ: El cuatro, que aquí también hay cuatro [S*eñala la fila de la figura 4 de izquierda a derecha*] y aquí hay tres [*señala la columna de la figura 4 de arriba hacia abajo*], pero si usted suma con éste [*indicando el segundo círculo de la fila de la figura 4*], [...], con éste, entonces da también cuatro [*señala la columna de la figura 4 de arriba hacia abajo*]. [23:09 – 23:14].

PROFESORA: También va a dar cuatro, entonces miren niños, miren lo que está haciendo José, él está es sumando, entonces el dice, pues, dice: aquí hay dos [*señala con el dedo los dos círculos inferiores de la figura 2*] y si yo sumo éste con éste [*señalando con el dedo el círculo inferior derecho y el de arriba en la figura 2*] también hay dos, aquí hay tres [*contando indica con el dedo los círculos de la fila en la figura 3, de izquierda a derecha*] y si yo sumo estos dos con éste [*indica con el dedo los círculos de la columna de la figura 3, de arriba hacia abajo*] también hay tres, ¿sí? ¿Eso fue lo que entendí?, a bien, y aquí hay cuatro [s*eñala la fila de la figura 4, de izquierda a derecha*] y si yo sumo [*contando los círculos de la columna de la figura 4, de arriba hacia abajo*] un, dos, tres, con éste, cuatro. Entonces aquí [*señala con la mano la figura 5*] explícame éste. [23:14 – 23:36].

JOSÉ: Pues que aquí hay cinco [*indica con el marcador la fila de la figura 5, de izquierda a derecha*] y si, aquí hay cuatro [*indica con el marcador la columna de la figura 5, de arriba hacia abajo, sin señalar el círculo que se cruza con la fila*], pero si usted suma con esta da cinco [*indica con el marcador la columna de la figura 5, de arriba hacia abajo y golpea con el marcador el círculo que cruza a la columna con la fila*]. [23:36 – 23:40].

PROFESORA: Ah, bien, y entonces la figura seis ¿cómo sería? Dibuja la figura seis. [23:40 – 23:43].

[*José dibuja la figura seis*] [*Dibuja los dos primeros círculos de la fila, mira las figura iniciales (1, 2, 3, 4) y sigue dibujando tres círculos más. Se detiene y borra un trazo que se le paso en el cuarto círculo, se aparta del tablero y vuelve y dibuja un sexto círculo en la fila. Sobre el tercer círculo de izquierda a derecha, comienza a dibujar los círculos de la columna, dibuja cinco círculos y se aparta del tablero*] [23:43 – 24:05]

PROFESORA: Listo, ¿por qué? [...] ¿Por qué? Explícame. [24:05 – 24:09].

JOSÉ: [*Escribe el "6" debajo de la figura que dibujó*] Porque vea, [*golpeando con el marcador sobre los círculos que acabó de dibujar, cuenta los círculos de la fila*] uno dos tres cuatro, cinco y seis, [*golpeando los círculos, cuenta los círculos de la columna*] y aquí hay uno, dos, tres, cuatro y cinco y si sumo ésta [*indicando con el marcador el círculo que cruza a la columna con la fila*] también da seis. [24:09 – 24:16].

PROFESORA: ¡Ah bueno!

JOSÉ: Y este círculo es la figura [*indicando con el marcador el círculo que cruza a la columna con la fila*], y éste también [*indicando con el marcador el círculo que cruza a la columna con la fila en la figura 5*]

PROFESORA: ¿Qué ese es el círculo de la figura? ¿Qué significa el círculo de la figura? [24:19 – 24:22].

JOSÉ: Pues que se [*indicando el primer círculo de izquierda a derecha en la fila de figura 6*], que por esta parte [*señala la columna de la figura 6, de arriba hacia abajo*] se suma éste también [*indicando el círculo que cruza la fila y la columna en la figura 6*] y por esta parte [*señalando la fila de la figura 6, de izquierda a derecha*] también [*indicando el círculo que cruza la fila y la columna en la figura 6*] [24:22 – 24:26].

PROFESORA: ¡Ah ya! muy bien José, muchas gracias. Listo chicos, entonces, miren, tengo ya la figura cinco [*toma el borrador y borra la figura 5 que anteriormente dibujó Sunner*] y la figura seis, ¿listo?, entonces, yo creo que a estas alturas, pues a todos nosotros nos queda fácil pintar la figura número siete [*señala con el dedo la figura 6 y va bajando el dedo por el tablero hasta un espacio en blanco*], ¿cierto? Porque entonces, si yo quisiera pintar la figura número siete ¿cuántos círculos pinto de forma horizontal? [*Indicando una fila de derecha a izquierda en un espacio en blanco del tablero*] [24:26 – 24:48].

NIÑOS: siete.

PROFESORA: Y ¿cuántos pinto…? [*Indicando una columna de arriba a abajo en un espacio en blanco del tablero*].

NIÑOS: Seis.

PROFESORA: Seis, y de la manera como la está construyendo José, pues serían siete, con uno repetido, o sea sería uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ¿y hacia arriba? [24:53 – 25:07].

NIÑOS: Seis.

PROFESORA: uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis [*dibujando los círculos de la columna de la figura 7*], y esa sería la figura número siete, ¿listo? Muy bien, pero entonces ahora vamos a hacer algo mucho más interesante, porque ¿qué ocurre? Pues si yo les pregunto por la figura ocho pues ustedes también ya van a saber cómo es la figura ocho ¿listo?, pero quiero que hagamos algo diferente ¿listo? [25:08 – 25:26].

NIÑO: ¿Es con estas hojas?

PROFESORA: Sí, es con las hojas, pero entonces ya les explico. Entonces miren, quiero que hagan lo siguiente, [*tomando las guías*] entonces vamos a pasar la hojita a la siguiente página [...] ¿listo? [...] entonces [...] ¿Santiago? Tú me vas a hacer un favor, vas a leer lo que dice el punto número 2 y todos los demás vamos a escuchar, ¿listo? Entonces Santiago, léeme el número dos, es nuestra segunda misión, porque en la primera misión nos fue súper bien ¿cierto? entonces, Santiago, número dos. [25:27 – 26:07].

SANTIAGO: [*Leyendo el encabezado del punto de la guía*] "¿Hay alguna manera de encontrar el número de círculos en la figura 15? ¿Sí? Construir la figura. Explica" [26:07 – 26:18].

PROFESORA: Listo, entonces miren esto. Entonces voy a volverlo a leer dice, será que, miren, miren esto, es que yo estoy construyendo, yo puedo seguir construyendo la siguiente, la siguiente, la siguiente [*señalando las figuras del tablero*], pero me están preguntando si existe la manera de que yo por ejemplo pueda construir, ya no la figura ocho [*señalando la figura 7 del tablero*] sino la figura quince [*Levanta y estira el brazo, como indicando algo lejano*] sin necesidad de dibujar las anteriores ¿si existe o no? [26:18 - 26:45].

NIÑOS: Sí, es fácil.

PROFESORA: ¿Sin construir la figura?

NIÑOS: Sí.

PROFESORA: Bueno, miren esto, es decir, ya no vamos a hacer el dibujito, o sea ya no quiero que hagan el dibujito, entonces, ¿será que si existe la manera por ejemplo, de encontrar el número de círculos que tendría la figura número quince? [26:49 – 27:09].

NIÑOS: Sí.

PROFESORA: Sin necesidad de dibujarla, ¿si se puede? ¿Cómo?

JOSÉ: Fácil.

PROFESORA: [...] José.

JOSÉ: [...] Pues ocho acá [se corta la grabación] [27:14 – 27:17].

PROFESOR VERGEL: A continuación [...] viene la discusión entre pequeños grupos. Anteriormente las producciones de los estudiantes habían sido de forma individual con preguntas de la profesora y salidas al tablero y discusión al interior de cada grupo. A continuación se va a plantear una discusión entre pequeños grupos. Dos grupos, para ser más exacto. [27:18 – 27:59]

PROFESORA: Vamos a ver cómo nos fue ¿bien? Entonces, bueno, van a alzar la mano los estudiantes que me dicen que sí se puede encontrar una manera de conocer el número de círculos que hay en la figura quince sin construir la figura. ¿Quiénes dijeron que si? [28:00 – 28:16].

NIÑA: Yo.

PROFESORA: ¿Tú dijiste que sí? Ah listo, entonces todos dijeron que sí. Listo, entonces ahora ¿por qué?, entonces, ¿quién nos quiere contar? Tú José, a ver cuéntanos ¿qué pasó? [28:16 – 28:27].

JOSÉ: Pues (*...)*.

PROFESORA: O sea, cuéntanos tú lo que pusiste acá. Tú dijiste que sí se podía y entonces ¿qué escribiste? [28:28 – 28:32].

JOSÉ: [*Mirando su propia guía*] Sino que yo creo que para armar la figura quince [*sigue con el borrador del lápiz la parte que va leyendo de la guía*] hay que poner quince horizontal y catorce vertical [28:32 – 28:39].

PROFESORA: Y catorce, o sea que eso ¿Sumarían cuánto? [28:39 – 28:42].

JOSÉ: Veintinueve.

PROFESORA: Veintinueve, ¿a todos les dio veintinueve?

NIÑOS: Sí señora.

PROFESORA: ¿Sí? A ver yo miro, entonces acá por ejemplo a Adriana, entonces Adriana ¡qué escribió! Dice: [*Leyendo la guía de Adriana*] "Profe Johanna yo creo que quince horizontal [*indica con el dedo la palabra en la guía*] y catorce vertical [*indica con el dedo la palabra en la guía*]" ¿Tú qué escribiste? [28:42 – 28:56].

NIÑA: [*Leyendo su propia guía*] "Profe Johanna, si se puede, porque cómo lo explicó Luis yo lo haría restando" [29:00 – 29:04].

PROFESORA: ¿Quién es Luis? El niño de la otra mesa.

NIÑOS: Sí.

PROFESORA: Listo, tú lo harías restando, y ¿cómo lo harías?

NIÑA: O sea [...] quince [*Arrastra su dedo índice sobre la guía, de derecha a izquierda*] [...] quince [...] [29:08 – 29:14]

PROFESORA: ¿Horizontal? Bien.

NIÑA: Quince horizontal [*Arrastra su dedo índice sobre la guía, de derecha a izquierda*], Es que horizontal y catorce vertical [*Arrastra su dedo índice sobre la guía, de abajo hacia arriba*] [29:14 – 29:18]

PROFESORA: Ah listo, o sea que ¿cuánto te dio en total? [29:18 – 29:20].

NIÑA: Veintinueve.

PROFESORA: Veintinueve. Y tú, Yaneth, a ver ¿qué escribiste?

YANETH: [*Leyendo su propia guía*] "Profe en verdad sí existe…" [*Con el borrador del lápiz golpea la hoja*] [29:24 – 29:29].

PROFESORA: Dale ¿te da pena?, ¡no! Ven te ayudamos [*Toma la guía de Yaneth y la lee*] a ver aquí dice: "Profe en verdad sí existe porque es igual que los demás, lo diferente es que son más círculos porque hay más" Y ¿cómo sabías que eran veintinueve? ¿Cómo lo hiciste? [29:29 – 29:41].

YANETH: Con los dedos, o sea (…)

PROFESORA: ¿Con los dedos? [*Tocando cruzadamente sus dedos*]

YANETH: (…) Contando.

PROFESORA: Y ¿cómo? A ver dime.

YANETH: O sea, así.

PROFESRA: Bien, José ven, préstale, prestémosle atención a Yaneth, ¿cómo con los dedos? [29:47 29:54]

YANETH: Desde, o sea desde uno [*mueve las manos constantemente dando pequeños puños con la mano derecha sobre la palma de la mano izquierda*] hasta el quince [*desempuña los dedos de la mano derecha y los entrelaza con los de la mano izquierda y luego los suelta al terminar la explicación y vuelve a unir las manos*] [*las manos de Janet se ven un poco temblorosas, además todo el tiempo sostiene con la mano derecha dos lápices*] [29:55, 29:58].

PROFESORA: del uno hasta el quince y luego [*dirigiéndose a Janet*] [29:59, 30:01].

YANETH: (…) Eh y entonces, entonces yo conté catorce [mueve y aprieta las manos constantemente] más quince, entonces… [*Da pequeños golpes con los dedos de la mano izquierda sobre la palma de la mano derecha*] [30:02, 30:07].

PROFESORA: Y seguiste contando con los dedos, ah [*mientras YANETH se punza el centro de la palma de la mano izquierda con los lápices*] [30:07, 30:08].

YANETH: Me dio veintinueve [*toca la punta de los lápices con los dedos de la mano izquierda y al finalizar de hablar apoya la cabeza sobre las dos manos manteniendo los codos sobre la mesa*] [*la manos de Janet se ven un poco temblorosas durante toda su explicación, además todo el tiempo sostiene con la mano derecha dos lápices*] [30:09, 30:11].

PROFESORA: ¡Te dio veintinueve! Listo y tú ¿cómo lo hiciste? [30:12, 30:15].

LORENA: Pues yo escribí profe, si se puede porque viendo las anteriores el seis tiene seis círculos abajo y arriba tiene cinco círculos, pues yo creo que la del, que el quince tiene quince círculos abajo y catorce arriba. [*Lee*] [30:16, 30:30]

PROFESORA: Y entonces le sumaste y te dio veintinueve.

Y ahora tú, a ver, dice: profe Johanna creo que se puede hacer así horizontal quince vertical, y ¿vertical cuánto? [*La profesora lee lo que escribió la niña 2*] [30:31, 30:42].

JENNY: Catorce je je je [*escribe el catorce que le hacía falta en su respuesta*] [30:43, 30:44].

PROFESORA: Catorce. Listo, ¡muy bien!, llegaron a un consenso, muy bien. Entonces vamos a hacer una cosa, si listo, bien, chicos entonces vamos a hacer la última misión de la clase porque ya nos tenemos que ir, entonces mire van a hacer el tercer punto, listo entonces cada uno lo va a leer y cada uno lo va a solucionar, si tiene alguna duda me llaman, listo, que voy para el otro grupo, bien, gracias. [*Dirigiéndose al grupo*][30:44, 31:13].

Bueno entonces acá vamos a hacer una cosa porque…vamos a hacernos todos ¿será que se puede? [*Los estudiantes se reúnen todos en una mesa en excepción el grupo anterior*] [31:14, 31:27].

Entonces, vamos a ver cómo nos fue, bien, entonces quienes de acá, van a alzar la manito, me van a contar, quienes de acá dijeron que si existe la manera de calcular el número de círculos de la figura quince sin hacer la figura. Todos !uy! [*Todos alzaron la mano*] Que niños tan pilos. Listo. ¿Por qué? Entonces quien me quiere contar ¿Por qué? [31:28, 31:51].

SUNNER: Yo, porque podemos sumar el catorce y el quince y a ver cuál es el resultado de cuál es el número [*simula que escribe con el dedo sobre la palma de la mano izquierda*] de que esas dos números forman [31:52, 32:06].

PROFESORA ¿Y por qué catorce y quince? [32:07, 32:08].

SUNNER: (…) Porque estamos haciendo de la figura [*se empieza a rascar el brazo derecho*] [32:09, 32:13].

PROFESORA: Ah tú me explicas bien, a ver, explícamelo, ah bien, entonces tú ¿Por qué? [*Interviene*][32:11, 32:17].

LUIS: Sabemos, sabemos que el resultado de abajo es quince ¿no? [*Señala con el lápiz y luego con el dedo la horizontal de derecha a izquierda*], tenemos que poner quince [*realiza movimiento con la mano sobre la hoja de manera horizontal de abajo hacia arriba*] y de pa' arriba tenemos que poner catorce *[señala con la mano de abajo hacia arriba la vertical*], entonces después sumo los dos resultados y me da el número. [*Señala con el lápiz la suma que realizo en la hoja*] [32:18, 32:33].

PROFESORA: Sí pero, pero yo sigo sin entender, como así y ¿por qué quince? y ¿por qué catorce? [32:34, 32:36].

SUNNER: Porque quince es el… la figura que (…) [*mueve constantemente las manos*] [32:37, 32:43].

PROFESORA: Ah la figura que estoy calculando la figura quince, entonces yo coloco quince horizontal, ah listo ahora sí entendí, y todos escribieron lo mismo a ver [32:44, 32:52].

[*En coro responden: sí*]

Dice: profe yo pienso que sin hacer la gráfica podría explicarse así horizontal tendría que ir… pero acá dice diferente, dice: horizontal tendría que ir catorce círculos y vertical quince, ¿sí o no? [32:53, 33:01].

[*En coro responden: no, al contrario*]

Al contrario, y tú ¿por qué escribiste esto? Explícame [33:02, 33:05].

FABIO: Pues profe, yo pensé que era así profe [33:06, 33:09].

PROFESORA: ¿Cómo, cómo, cómo? [33:09, 33:10].

SANTIAGO: Es que él se confundió con las de vertical y horizontal [33:11, 33:13].

[*En coro junto con la profesora exclaman: ¡ah*!].

PROFESORA: Ok, dime que es horizontal para ti, ¿horizontal es cómo? Dime, acá si yo miro la figura esto es horizontal o vertical [*busca en el taller la ilustración principal y le pregunta respecto a la fig.4 la fila*] [33:14, 33:22].

FABIO: Horizontal [33:23].

PROFESORA: Y entonces tú aquí dijiste que eran catorce círculos [*señala la horizontal*] [33:24, 33:26].

FABIO: Ahí la,… lo coloqué mal [33:27, 33:29].

PROFESORA: ¿lo colocaste mal? [33:30, 33:31].

FABIO: Sí señora [33:32].

PROFESORA: Ah listo [33:33].

SANTIAGO: Debió haber colocado acá vertical y acá horizontal [*señala con el lápiz donde tuvo el error*] [33:34, 33:36].

PROFESORA: bien, entonces acá, pregunta listo, hasta el momento ¿cómo les ha parecido? ¿Estaba fácil calcular? [*Dirigiéndose a todos a todos*][33:34, 33:36].

[*En coro responden: sí*].

Sí, listo [33:37, 33:43]

SANTIAGO: Ya acabé la tres.

PROFESORA: ¡Uy tú ya acabaste la tres! no eso es trampa porque se me adelantaron, bueno entonces ahora si efectivamente la última misión de la clase [33:45, 33:49].

SANTIAGO: Yo escuché que estabas dictando allá lo que estabas dictando allá en la otra mesa [33:49, 33:51].

PROFESORA: Ja ja ja, tú escuchaste bueno, entonces ya la última misión [33:52, 33:54]

[*Corte video*]

PROFESORA: Explica lo que debe hacer para construirla, entonces que es lo que yo quiero que haga, ustedes me van a escribir acá [*señala el espacio en blanco de la hoja*], ósea vamos a hacer como una especie de juego donde yo soy un robot y yo solamente voy a hacer lo que ustedes me digan, lo que ustedes escriban acá [*señala el espacio en blanco de la hoja*] entonces ustedes me van a decir profe Johanna dibuje tantos círculos en tal dirección y tantos círculos en otra dirección, lo que ustedes piensan lo que me tienen que decir a mí para que yo pueda dibujar en el tablero la figura numero veinticinco, listo, si ahora si entendimos. Sin dibujarla. [33:55, 34:20].

¡Tú ya lo hiciste! a ver yo miro, umm mjum listo muy bien entonces esperemos a tus compañeritos y ya [*se dirige a uno de los estudiantes*] [33:55, 34:39]

TRANSCRIPCIÓN VIDEO. SESIÓN Nº 2. 26 DE ABRIL DE 2012.
Características de transcripción: video 4 26 2012. 8:19 AM. – 8:44 AM.

Profesor Vergel: Los niños empiezan a resolver del instrumento la pregunta número 4 y la pregunta número 5. [00:44 – 00:55].

Profesora: Santiago tiene una figura de esta secuencia y lo que sabemos es que él uso para formar esa figura 19 círculos, la pregunta es: ¿A qué número de figura corresponde? Entonces ustedes que van hacer se van a imaginar eso, que tiene eso figura que está haciendo Santiago y que tiene 19 círculos, Que tenemos que hacer nosotros averiguar el número de la figura y lo van a escribir acá, listo, entonces van pensando. [01:04-01:27].

Profesor Vergel: Pero tienen que explicar la manera como procedieron. [01:28-01:31].

Profesora: Ah bueno ok, entonces que vamos hacer: primero vamos a pensar ¿qué número de figura seria? Entonces ustedes me van a escribir aquí la manera que cada uno de ustedes procedió para encontrar la respuesta, o sea me van a decir Profe. Yo pensé que y lo explican ahí, listo. [01:32- 01:48].

Profesora: Bien acá […]. Vamos a ver la pregunta número 4 ¡listo!, entonces José colabóranos lee lo que dice en la figura 4. [01:56-02:25].

José: Santiago tiene una figura de esta secuencia. Él usó exactamente 19 círculos. ¿A qué número de figura corresponde? Explica la manera como procediste para encontrar tu respuesta. [02:26-02:39].

Profesora: ¡Listo!, entonces, a ver si entendimos lo que tenemos que hacer [02:40-02:44]

Niños: La secuencia. [02:45-02:46].

José: ¡Eh! hacer la figura exactamente 19. [02:47-02:49].

Profesora: Entonces, bueno resulta que Santiago tiene una figura de esta secuencia, tiene una figura pero no nos están diciendo que numero de figura es, no sabemos si es 1˚, 2˚ , 3˚… solamente nos dicen que el utilizó 19 círculos para armar esa figura, entonces que tenemos que hacer, encontrar el número de esa figura, entonces que quiero que hagan, primero van a pensar cómo solucionarlo y luego me escriban acá, me explican la manera como cada uno de ustedes procedió para encontrar la respuesta, ¡listo ! [02:50-03:19].

José: Sí señora [03:20].

Profesora: ¡Hola! ¿Cómo vamos? [03:25-03:26].

Niñas: ¡Bien! [03:27].

Profesora: ¡Ah!, ustedes ya lo están resolviendo, listo entonces vamos a ver lo que dice la pregunta número 4, entonces dice: Santiago tiene una figura de esta secuencia ¿De cuál secuencia? Esta secuencia que nosotros estamos trabajando [*Pasa las hojas hasta llegar al primer ejercicio del instrumento]* entonces Santiago tiene una figurita de estas [*Señalando las figuras 5 y 6 del primer ejercicio del instrumento trabajados en la sección anterior]* y Santiago 19 círculos para armarla, lo que no sabemos es qué número de figura es, entonces yo quiero que me escriban acá, cómo hago yo para saber qué número de figura es, ¡Sí! ¡Listo!. [03:28-03:56].

Esneider: Profe yo pienso que si uno sigue haciendo estos círculos de acá [*Pasa las hojas hasta llegar al primer ejercicio del instrumento señalando las figuras 5 y 6 del primer ejercicio del instrumento trabajados en la sección anterior]* sigue haciendo hasta el 7,8, 9 y 10 hasta que pare en el 10, y como el 9 [Refiriéndose a la figura 9] tiene 8 círculos [*Refiriéndose al número de círculos que tiene la columna de la figura 9 pero señalaba con su dedo índice la columna de la figura 6*] porque le restan 1, entonces el 10 debe tener 9 círculos [*Haciendo con su mano un desplazamiento vertical*] y 10 +9 serían 19. [04:00-04:22] .

Profesora: Ah, o sea que el número de la figura ¿cuál es? es la figura número ¿qué? [04:23-04:26].

Esneider: 10. [04:27].

Profesora: La figura número 10, y ustedes que dicen […] Si también ¿Por qué? dime tu ¿Por qué? ¿Qué escribiste? [04:28-04:34].

Luis: Es la figura 10, porque si pongo 10 de esos círculos horizontalmente y le resto 1 quedan 9 y como al tener 19 y a ese 19 le quite 10 queda 9 y ese 9 lo pongo arriba [*Haciendo con sus manos un desplazamiento vertical*]. [04:36-04:47].

Profesora: Y entonces es la figura ¿qué? número ¿qué? [04:48-04:49].
Luis: 10. [04:50].
Profesora: ¡10! ¡Sí!. [04:51].
Profesor Vergel: ¿Cómo es lo de horizontal que tú dijiste? [04:48-04:49].
Luis: Lo de horizontal son 10 [*Hace el movimiento de: tiene los dedos pulgares muy cerca y luego los va separando simétricamente*] y como ahí había 19, entonces al 10 le quito 1, quedan 9 y esos 10 que le había quitado al 19 me quedan 9 y esos los pongo de para arriba. [04:50-05:08].
Profesor Vergel: o sea que horizontal y vertical. [05:09-05:12].
Grupo de Niños: Y vertical. [05:11].
Profesora: Bien, alguien dibujo la figura. [05:13].
Grupo de Niños: ¡No! [05:14].
Profesora: ¡No! Tuvieron la necesidad de dibujar la figura. [05:15].
Grupo de Niños: ¡No! [05:16].
Profesora: ¡No! ¿Por qué no había necesidad de dibujar la figura? [05:17-05:19].
Esneider: Uno se lo puede imaginar. [05:20-05:21].
Profesora: ¡Uno se lo puede imaginar! y ¿por qué te lo podías imaginar? [05:22-05:24]
Esneider: Porque sí, porque […]. [05:26].
Grupo de Niños: Porque uno se lo imagina. [05:27].
Profesora: ¡Ah bueno!, entonces yo le pregunto si yo les hubiera dado esto [*Refiriéndose al instrumento*] ¿lo hubieran podido hacer? [05:28-05:44].
Grupo de Niños: ¡Sí! [05:35].
Profesora: ¡Sí!, bueno alguien más, ven déjame ver esta [*Tomando uno de los instrumentos desarrollados por los niños*]. [05:36-05:39].
Profesor Vergel: O una respuesta distinta. [05:40].
Profesora: Sí, una respuesta distinta ¿A todo el mundo le dio la figura número 10? [05:41-05:44].
Grupo de Niños: ¡Sí! [05:45].
Profesor Vergel: O que hubieran procedida de manera distinta. [05:46-05:47].
Profesora: ¡No! O sea todos, tu ¿cómo lo pensaste? ¿Por qué dices tú que es la figura número 10? ¿Por qué? [05:50-05:55].
Kevin: Porque la horizontal es 10 y si le quito 1 al 10 le quedan 9 y ese queda vertical y entonces 10 + 9 es 19. [05:56-06:08].
Profesora: es 19 también, ¡sí! ¿Igual? [06:09].
Grupo de Niños: ¡Sí! [06:10].
Profesora: ¡Uy! Que niños tan pilos, bien, entonces ahora vamos hacer el número 5 ¡listo! [06:11-06:16].
Esneider: Profe yo no entiendo eso. [06:17-06:18].
Profesora: ¡Que no entiendes! [06:19].
Esneider: Esta (…). [06:20].

Profesora: ¿Cuál?, ¡Ah! , Aquí hay una pregunta de Esneider dice: ¿Existe alguna figura que tenga un número par de círculos? Entonces Esneider dice: Pero yo no entiendo porque no hay ninguna figura, bien esta pregunta hace referencia a estas de acá [S*eñalando las figuras del primer ejercicio del instrumento trabajados en la sección anterior],* ¿será que va a existir alguna figura que tenga un número par de círculos? [06:20-06:38].

Kevin: No. [06:39].

Profesora: ¿Por qué no? ¿Por qué dices que no? [06:40-06:46].

Kevin: Porque acá es el 4 y uno tiene que restarle 1. [06:47-06:52].

Profesora: ¡restarle 1!, bien, entonces miren que esta figura [S*eñalando las figuras del primer ejercicio del instrumento trabajados en la sección anterior]*. Aquí [S*eñalando el enunciado de la pregunta número 5 del instrumento]* hay una palabra: Número par ¿cuáles son los números pares? [06:53-07:00] .

Grupo de Niños: 2, 4, 6,8. [07:01-07:05].

Luis: Todos los números que terminan en […]. [07:05-07:06].

Profesora: Si los que terminan en ¿qué? [07:08-07:09]

Luis: Todos los números terminados 2, 4, 6,8 y 10. [07:10-07:12].

Profesora: ah bueno, miren que han dicho varias cosas, si los númeroos pares son los que me acabaron de listar, pero también son los números que tienen; que termina ¿en qué fue lo que me dijiste? [07:13-07:21].

Luis: Que terminan en: 2, 4, 6,8 y 0. [07:22-07:26].

Profesora: Bueno, esos son los números pares ¡Listo!, pero entonces los números pares son aquellos que se pueden dividir en 2 y la división es exacta, por eso es que ustedes me están listando el 2 el 4 si el 6 el 8 y el 0, entonces la pregunta es la siguiente tengo que mirar el número de círculos que componen cada figura [S*eñalando las figuras del primer ejercicio del instrumento trabajados en la sección anterior]* y la pregunta es ¿será que va existir alguna figura que tenga un número par de círculos?. [07:27-07:49]

Grupo de Niños: ¡mjum! [07:50]

Profesora: a ver, por ejemplo la figura número 1 ¿Cuántos círculos tiene? [07:51-07:54]

Grupo de Niños: 1. [07:55]

Profesora: ¿La figura número 2? [07:56]

Grupo de Niños: 3. [07:57]

Profesora: ¿La 3? [07:58]

Grupo de Niños: 5. [07:59]

Profesor Vergel: Si todos están convencidos de que no existe ninguna figura que tenga un número par de círculos, sería importante que el espacio en blanco escribieran ¿Por qué? con sus propias palabra, cada uno solito con sus propias palabra que explique ¿por qué? en convencidos ok. [08:00-08:22]

Profesora: Bueno, como nos fue aquí, entonces vamos a revisar, ¿Quién me quiere compartir su respuesta del número 4 lo que escribieron? Tú José ¡no!, tú si dale Adriana haber que escribiste, cuéntanos que escribiste. [08:25-08:51]

Adriana: Escribí que la figura corresponde al número 18, porque acá tiene 18 bolitas [*Señalando la columna de la figura que ella dibujo en pregunta número 4*] y acá 19 [*Señalando la fila de la figura que ella dibujo en pregunta número 4*] y acá [*Señalando la intersección entre la columna y la fila de la figura que ella dibujo en pregunta número 4*] completa 19. [08:53-09:01].

Profesora: Listo, a todo el mundo le dio lo mismo, todo el mundo piensan que es (…). [09:02-09:04].

Jennifer: No. [09:05].

Profesora: ¡No!, a ti ¿Qué te dio? [09:06].

Jennifer: La figura 10. [09:07].

Profesora: ¿Por qué la figura 10? [09:08].

Jennifer: Porque mirando la figura 4, le estaría sumando estos 3 círculos [S*eñalando los círculos de la fila de la figura 3 del primer ejercicio del instrumento trabajados en la sección anterior] a este* [Se*ñalando los círculos de la columna de la figura 4 del primer ejercicio del instrumento trabajados en la sección anterior],* entonces yo le sume los 9 al 10 y nos dio ese. [09:09-09:24]

Profesora: Y entonces te (...) [09:25]

Jennifer: Entonces me dio la 10. [09:26].

Profesora: Te dio la figura 10, ¿alguien más le dio la figura 10? ¿A ti? [09:27-09:30].

José: No porque, usted corrió 9 para aquí [*Señalando la columna de la figura que Jennifer dibujo en pregunta número 4*] y 9 [*Señalando la fila de la figura que Jennifer dibujo en pregunta número 4*] para acá o 19 para aquí [*Señalando la columna de la figura que Jennifer dibujo en pregunta número 4*] y 9 para acá [*Señalando la fila de la figura que Jennifer dibujo en pregunta número 4*]o 10 para acá [*Señalando la fila de la figura que Jennifer dibujo en pregunta número 4*] y 9 pa' acá [*Señalando la columna de la figura que Jennifer dibujo en pregunta número 4*]. [09:31-09:36] .

Jennifer: ¡No! 10 se para acá [*Señalando la fila de la figura que ella dibujo en pregunta número 4*] y 9 de pa arriba [*Señalando la columna de la figura que ella dibujo en pregunta número 4*]. [09:37].

José: NO, porque usted estaría sumando todo. [09:38]

Adriana: Ahí los estaría sumando. [09:39].

José: Ahí los estaría sumando todo y tiene que ser la figura. [09:40-09:42]

Jennifer: Por eso, utilice los 19 círculos que dice acá [*Refiriéndose al enunciado de la pregunta número 4*]. [09:43-09:45].

Profesora: A ver, volvamos otra vez al ejercicio dice: Santiago tiene una figura y Santiago uso para hacer la figura 19 círculos, o sea todos los círculos de la figura tienen que sumar 19 si entonces ¿Qué dicen? ¿Quién más le dio la figura número 10? ¿A ti? a ti, a bueno, ¿y a ti como te dio la figura número diez? [09:46-10:03].

Niña 3: diecinueve y dieciocho [10:03, 10:04].

Profesora: pero, por ejemplo aquí ¿cuántos círculos hay? [*Señala toda la representación*] [10:05, 10:07].

Niña 3: Eh… [*Uno de los niños interviene y dice: 36*] [10:07, 10:09].

Profesora: ¿Y me están diciendo qué? y Santiago que me está diciendo ¿Qué utilizo cuantos? [*Responden en coro: 19*] diecinueve, entonces ¿tú qué dices? José de tu respuesta. [10:08, 10:19].

José: Está mal [*contesta con la cabeza agachada, mientras manipula una caja de tinta con una mina*] [10:20].

Profesora: ¿Qué está mal?, ¿por qué? Je je je [10:21, 10:22].

José: Porque tenía que usar solamente diecinueve y yo use treinta y cinco [*mientras habla da golpes con la mina sobre la caja de tinta*] [10:23, 10:25].

Profesora: Exacto. Utilizaste muchos más círculos. ¿A ti porque es que te dio diez? [10:24, 10:33].

LAURA: Porque, viendo las anteriores eh je... [*Sonríe nerviosamente y empieza a sacudir las manos*] porque Santiago decía que utilizo diecinueve círculos, entonces yo puse diez de para abajo [*señala con la mano sobre la figura la fila de derecha a izquierda*] y nueve para arriba [*luego señala la fila de abajo hacia arriba*] como si los estuviera separando [*une las manos y las separa*] el nueve para un lado y el diez para el otro. *[Mueve el brazo derecho hacia afuera y luego el izquierdo hacia afuera*] [10:34, 10:48].

Profesora: Y bueno, y porque no hubiera podido yo colocar nueve abajo y diez arriba, ¿por qué no? [10:49, 10:53].

LAURA: Umm... [*Se empieza a rascar la pierna derecha* [porque viendo las anteriores los, mayor numero esta abajo y el menor está arriba [*da golpes con los dedos de la mano izquierda sobre la mesa mientras explica, cuando dice arriba levanta la mano*] [10:52, 11:00].

Profesora: Ah muy bien y tú, [*se dirige a*: Yaneth] ¿cómo te fue? [*Apoya la cabeza sobre la mano izquierda y sonríe con timidez y trata de tapar la hoja con la mano derecha*] ¡No escribiste! Jejeje, bueno no escribiste pero entonces ven ¿tú qué dices de la respuesta? Tú qué dices ¿sí? si era la figura diez o no era la figura diez [*dice que si con la cabeza, y va manipulando el lápiz con las dos manos*]. Mira lo que están diciendo ahí. Dicen que la figura diez porque colocan acá diez círculos horizontalmente y verticalmente nueve [*va señalando la fila y la columna de la figura*], entonces que dices ¿sí? estás de acuerdo [*dice que si con la cabeza, y va manipulando el lápiz con las dos manos*], y porque no terminaste de escribir ¿qué paso? [11:01, 11:25].

[*Sonríe con timidez y luego coloca su mano derecha cerrada sobre la boca]*

Profesora: Je je je ¡te cuesta escribir! ¿Sí? [*Dice que no con la cabeza y con la mano aun pegada a la boca*] ¿No? Entonces [11:26, 11:33].

YANETH: Es que no sabía cómo hacerlo [*con la mano cerrada da suave golpes sobre la boca*] [11:33, 11:35].

Profesora: ¿No sabías qué? [11:36].

YANETH: ¿Cómo hacerlo? [11:37].

Profesora: No sabías como escribir [dice que si con la cabeza] o ¿si sabias la respuesta? [*Dice que no con la cabeza, y va manipulando el lápiz con las dos manos*], tampoco no sabías la respuesta, ah bien. Y a ti como te fue Adriana, no tampoco, no porque no lo escribiste [11:38, 11:50]

Adriana: Porque no lo entendí [*dice que no también con la cabeza]* [11:51, 11:52]

Profesora: ¿No lo entendiste? [11:53]

Adriana: No, no sé [*empieza a golpear el lápiz sobre la mesa de arriba hacia abajo*] [11:54]

Profesora: Ah, no lo entendiste… listo, bien. Bien, entonces listo, entonces. [11:55, 12:04]

Rodolfo: Joanna [interviene Rodolfo], ¿cuántos círculos tiene la figura dos? [*Pregunta a Adriana*] mira allá en la secuencia de la primera página. [*Uno de los compañeros le ayuda a Adriana a encontrar la secuencia que el profesor la sugiere que visualice*] [11:05, 12:19]

Adriana: Tres [*responde también mostrando tres con sus dedos*] [11:20, 12:21]

Rodolfo: ¿Cuántos círculos tiene la figura tres? [*Pregunta a Adriana*] [11:22, 12:24]

Adriana: (…) Cinco [11:25, 12:28]

Rodolfo: Cinco muy bien. ¿Cuántos círculos tiene la figura número cuatro? [11:29, 11:32]

Adriana: Siete [*cuenta con el dedo cada uno de los círculos de la fila de la figura*] [11:33, 12:34]

Rodolfo: Siete y antes de ayer trabajamos la figura número cinco y la figura número seis y pudiste dar el número de círculos para la figura cinco y el número de círculos para la figura seis, sí. Muy bien, entonces la pregunta ahora es como al revés, la pregunta es, si yo, si yo te pregunto lo siguiente con base en esa secuencia que tienes ahí. Si yo tengo esas secuencias que tienes ahí, por ejemplo, si yo tengo tres círculos a que numero de figura corresponde, pero va contestar ella y la vamos a dejar pensar un momentito [*refiriéndose al grupo*] Si yo te digo: tengo tres círculos nada más ¿a qué número de figura corresponde? [*Pregunta a Adriana*] [12:35, 13:18]

Adriana: Al tres [*señala la figura con el dedo*] [13:19, 13:20]

Rodolfo: No, tres círculos, tres círculos, ¿Dónde hay tres círculos? [13:21, 13:24]

Adriana: En la dos [*señala con el dedo la figura*] [13:25, 13:26]

Rodolfo: Entonces ¿a qué número de figura corresponde? [13:26, 13:27]

Adriana: (…) Tres [señala la figura sin tocarla] [13:28, 13:31]

Rodolfo: No porque tú me mencionaste, si, si quieres colócame el dedito ahí, [*coloca el dedo sobre la fig.2*] ahí. Ahí hay tres círculos ¿cierto? ¿Y que figura es esa? [*Se queda pensando*] la dos cierto, sí. Y bueno si yo te pregunto ¿dónde hay cinco círculos? [13:32, 13:46]

Adriana: (…) En el tres [*señala con el dedo la fig. 3*] [13:48, 13:50]

Rodolfo: ¡En el tres! ¡Exactamente! en la tres. ¿Dónde hay un círculo? [13:51, 13:54]

Adriana: En el uno [*señala con el dedo la fig.1*] [13:55]

Rodolfo: ¡En la figura uno! ¿Dónde hay siete círculos? [13:56, 13:59]

Adriana: En la cuatro [*desplaza la mano hacia la figura pero no la señala*] [14:00]

Rodolfo: En la figura cuatro. ¿Dónde habría nueve círculos? [14:01, 14:04]

Adriana: En la cinco [14:05, 14:08]

Rodolfo: ¡En la cinco, muy bien! ¿Dónde habría once círculos? [14:09, 14:11]

Adriana: (…) En la seis [14:12, 14:14]

Rodolfo: En la seis. Entonces la pregunta que se te está haciendo, que te estamos haciendo es si hay diecinueve círculos, si hay presencia de diecinueve círculos ¿a que figura corresponde? Si, ¿ya entendiste la pregunta? si [14:15, 14:30]

Profesora: Listo, bien. Entonces ahora vamos a leer la pregunta número cinco, listo, entonces quien me colabora leyendo. ¡Tú!, listo. [14:31, 14:53].

NIÑA: ¿Existe alguna figura que tenga un número par de círculos? Explica. [*Lee, no se identifica la niña que lee*] [14:54, 15:01].

PROFESORA: Bien, entonces me están preguntando que si en esta secuencia yo pudiera hacer más, más, más figuras [*Con la mano derecha muestra como si estuviera colocando más círculos*] ¿Qué si existiría alguna figura que tenga un número par de círculos? Entonces, ¿qué es un número par? ¿Cuáles son los números pares? ¿No? [15:02 – 15:22]

JOSÉ: ¿Cuáles son los números pares?

PROFESORA: Ajá.

JOSÉ: [*Mirando hacia arriba*] el dos, el cuatro, el seis y el ocho y el cero [15:26 – 15:30]

PROFESORA: a listo, muy bien. Entonces miren esto de acá, ¿listo? Lo que me estás preguntando es que si yo puedo encontrar una figura que esté compuesta por un número par de círculos, entonces una figura que tenga solamente dos círculos, una figura que tenga solamente cuatro círculos, seis círculos, esa es la pregunta ¿listo? Entonces ustedes van a pensar, cada uno de ustedes va a pensar y me va a escribir acá y me escribe si sí el ¿por qué? O si no me escriben el por qué no ¿Listo? [15:30 – 16:00].

Tu respuesta, ¿quién me lee? Entonces.

NIÑA 2: ¿La tres?

PROFESORA: No, la cuatro.

NIÑA 2: [*Leyendo la respuesta de la guía*] "Profe, la respuesta es la ficha diez hay que colocar diez horizontal y nueve vertical" [16:04 – 16:11].

PROFESORA: Bien, alguien tiene lo mismo, ¿qué les dio a ustedes? ¿Qué figura les dio? ¿Qué figura te dio a ti? [16:11 – 16:16].

NIÑO: Diez.

PROFESORA: ¿La número diez? Y a ti ¿qué figura te dio Lorena?

LORENA: No la he escrito.

PROFESORA: ¿No la ha escrito? ¿Pero estás de acuerdo?

LORENA: La cuatro.

PROFESORA: Ah es la cuatro, pero tienes razón, ¿qué escribiste? [16:24 – 16:30].

LORENA: [*Leyendo la respuesta de la guía*] [*Con el lápiz va siguiendo la lectura*] "Profe Yo pienso que la horizontal la tenemos que colocar vertical nueve y horizontal diez" [16:32 – 16:40].

PROFESORA: Bueno aquí dice que colocas vertical [*Señala con el dedo la palabra en la guía*] nueve y horizontal [*Señala con el dedo la palabra en la guía*] diez ¿listo? Entonces ¿qué figura es? ¿La figura número qué? [16:41 – 16:48].

LORENA: Diecinueve.

PROFESORA: ¿La figura número diecinueve? Bien.

SUNNER: No.

PROFESORA: ¿Por qué no? ¿Por qué no Sunner? Explícale a Lorena.

SUNNER: Porque la ficha es el número [*Con el borrador del lápiz golpea la mesa*] , por ejemplo, si ve que aquí [*Tomando la guía de Lorena*] el número de la ficha es lo mismo, mire, aquí, aquí son tres [*Señala con el lápiz la fila de la figura 3*] y aquí son tres [*Señala con el lápiz el número en la figura 3*], dos [*Señala con el lápiz la fila de la figura 2*], dos[*Señala con el lápiz el número de la figura 2*], por eso la diez ¿se acuerda? [16:59 – 17:14].

PROFESORA: Bueno pero explícale bien porque mira que, expliquémosle bien a Lorena ¿listo? Tú me ayudas. Entonces mira, tenía yo 19 círculos, entonces Sunner está diciendo que… tú dijiste en tu respuesta que ibas a colocar, mira tú dices acá [*Señalando con el dedo lo escrito por Lorena en la guía*] que nueve vertical nueve y horizontal diez, entonces Sunner dice que si es diez entonces que es la figura diez porque… [17:15 – 17:35].

SUNNER: Porque mire, aquí tres [*Señala con el dedo el número de la figura 3*], es tres acá [*Señala con el dedo la fila de la figura 3*] ¿no?, cuatro [*Señala con el dedo el número de la figura 4*], cuatro acá [*Señala con el dedo la fila de la figura 4*], dos acá [*Señala con el dedo el número de la figura 2*] y acá [*Señala con el dedo la fila de la figura 2*], cinco acá [*Señala con el dedo la fila de la figura 5*] y seis [*Señala con el dedo la fila de la figura 6*] acá, ¿cuál es la del diez? Esa es la del diez, porque mire, haga una resta, diez y nueve le quito nueve, es la diez [*Moviendo el lápiz en la mano como indicando la operación*] [17:39 – 17:53].

PROFESORA: Tú que dices Lorena, ¿si te convence o no te convence? ¿Más o menos? A ver, tú que le puedes decir a Lorena ¿cómo hacemos para convencer a Lorena? ¿Cómo lo hiciste tú? ¿Por qué piensas que es la figura número 10? [17:54 – 18:06].

LAURA: Porque diez más nueve da diecinueve [*Moviendo el borrador del lápiz sobre la mesa*].

PROFESORA: Diez más nueve da diez y nueve listo y bueno, que fue lo que escribiste acá [*Toma la guía de Laura y busca la respuesta*], a ver yo miro, dice: El número de figura que corresponde es diez porque diez más nueve da diez y nueve, pero entonces según la respuesta tuya, la respuesta de Laura ¿yo podría colocar 9 círculos horizontales y diez verticales? ¿Sí? ¿No? [18:09 – 18:28].

LAURA: No.

PROFESORA: ¿Por qué no?

LAURA: No se puede porque ahí sería 8, nueve horizontal y 8 vertical [*Mueve el borrador del lápiz sobre la mesa mostrando la horizontal y la vertical pero sin ver la mano*] [18:32 – 18:39].

PROFESORA: Bueno, y porque no puedo colocar yo nueve [*Indica con el dedo una línea vertical*] y diez [*Indica con el dedo una línea horizontal*] es lo que te estoy preguntando, tú me dices que no pero ¿por qué no? [18:39 – 18:46]

LAURA: Porque descuadra.

PROFESORA: Porque es que tu acá me dices que simplemente porque suma diez y nueve [*Señalando lo escrito por Laura en la hoja*], en cambio, por ejemplo aquí Sunner me está diciendo [*Toma la guía de Sunner*] que porque yo coloco diez horizontal [*Con el dedo traza una línea horizontal sobre la guía*] y nueve vertical [*Con el dedo traza una línea vertical sobre la guía*] ¿sí? ¿Si estás de acuerdo con eso? ¿Diez? ¿Nueve? ¿Sí? Bien Entonces, Lorenita, ¿si entendiste? ¿No? ¿Sí? ¿Si es la figura número 10? Listo bien, entonces ahora vamos a leer. [Fin del video] [18:47 – 19:15]

Sesión 3

Se da inicio al video perteneciente a la sesión número 3 con el reconocimiento de una secuencia, la socialización del método que utilizó para reconocer dicha secuencia y resolver las preguntas formuladas:

00:00:00 – 00:00:57: estudiante 1, da respuesta a la pregunta 4 de la guía:

Estudiante 1: una secuencia aquí en el 1 [refiriéndose a la fila inferior de la figura 1] [indica con su dedo la fila inferior] es uno y le suman dos y en la segunda [refiriéndose a la fila superior de la figura 1] [indica con su dedo la fila superior] es uno y le suman uno, entonces son tres de sobra [encerrando con su dedo las tres unidades sobrantes]; entonces aquí en la 2 [refiriéndose a la fila inferior de la figura 2] [indica con su dedo la fila inferior] le suman dos y aquí en la segunda [refiriéndose a la fila superior de la figura 2] [indica con su dedo la fila superior] le suman uno y es la misma tres de sobra [encerrando con su dedo de nuevo las tres unidades sobrantes]; aquí tres [refiriéndose a la fila inferior de la figura 3] [indica con su dedo la fila inferior] y le suman dos y aquí tres [refiriéndose a la fila superior de la figura 3] [indica con su dedo la fila superior] y le suman uno, entonces son tres de la misma forma [encerrando con su dedo de nuevo las tres unidades sobrantes].

Profe Vergel: bueno, entonces.

Estudiante 1: entonces aquí, en la 81 [indica con su dedo el número 81 que está en la pregunta número 4 de la guía] eh aquí pues dice son 81 círculos, entonces 41 más 40 [indica con su dedo los números 40 y 41 que él escribió en su respuesta] da 81 y la figura es… la 39.

Profe Vergel: ¿Y por qué es la 39?

Estudiante 1: Porque si usted [indicando con su dedo el número 41 que él escribió en su respuesta] le resta a 41 el 2 da 39, y aquí [devolviendo la hoja al punto de las tres primeras figuras y haciendo referencia a la figura 3] a cinco le resta dos da tres [indica con su dedo la fila inferior] y la figura es la 3.

00:00:57 - 00:01:22: estudiante 2 y estudiante 3, dan respuesta a la pregunta 3 de la guía:
Estudiante 2: le va quitando es uno [indicando con su lápiz la fila inferior de la figura 1], le va quitando uno entonces va a seguir con el dos [concluyendo su idea indicando la fila superior], y a cien le quita uno es 99 entonces 199 [retirando el lápiz de la hoja].
Estudiante 3: Es 203 porque cien más cien es dos cientos más tres [girando cíclicamente sus muñecas] es 203, hágalo como quiera.

00:01:22 - 00:03:10: La profesora y Héctor socializan respuesta al punto 2 de la guía.
Estudiante 4: Yo voy en la 5.
Profesora Johana: En serio, bueno entonces vamos a mirar, no yo hasta ahora voy en la 2, entonces dice, calcule el número de círculos de la figura número 9 sin construirla, listo, entonces yo estaba acá con Héctor, entonces Héctor entonces qué escribiste, lee.
Héctor: Yo escribí, profe yo pienso que $9+9=18$ y $18+3=21$, porque el número de secuencia es 9, o sea que coloco horizontal 9 más 2 y arriba le resto 1 y… al 12 le resto 1 que me daría 11 después lo sumo…
Profesora Johana: No, pero esperen un momentico, porque yo ahí me perdí, esperen a ver, acá dice coloco horizontal 9 entonces como es colocar horizontal 9 a ver dime como es colocar horizontal 9, coloco así nueve o sea dibujo 9 círculos [la profe realiza movimientos circulares con desplazamiento horizontal con su mano], listo luego que les dices que hagan.
Héctor: [Héctor gira la hoja hacia sí para poderla ver bien] le sumo dos [indicando con su lápiz su respuesta].
Profesora Johana: le sumo dos, listo le sumo dos ajá y luego (…)
Héctor: arriba coloco lo mismo sino que le voy a restar uno [dejando fijo su lápiz en la hoja debajo de su respuesta], le voy a restar tres… [Dirigiendo el lápiz hacia su boca] o uno, uno le resto uno.
Profesora Johana: ah bien, si le entendemos (…) entonces o sea dibujo 9 círculos agrego dos, arriba agrego cuántos (…)
Héctor: agrego los 9 y le quito, pero entonces le quito 1 que me quedarían 8 [dejando su lápiz inmóvil contra su pecho].
Profesora Johana: bueno no dibújalo, dibújalo.

00:03:10 - 00:05:53: la profesora y los estudiantes Luis, Santiago, Héctor, Eneider y otros socializan en una mesa redonda sus respuestas a la pregunta 2 de la guía.
Profesora Johana: A ver, qué dice allí
Estudiante 5: [el alumno se ríe tímidamente balanceando su cuerpo hacia delante con sus manos entre las piernas y girando de lado a lado sobre su eje] a ver, lo que hice
Profesora Johana: léelo, léelo
Estudiante 6: Ay! yiyi

Kevin Steven: Bueno yo ya calculé la figura número 9, y si tú calculas 9 más 2 te quedan 11 y tú le quitas 1 te quedan 10 [el estudiante sostiene su hoja con la mano derecha y con un dedo izquierdo va siguiendo la lectura], sumando esos dos… da [el estudiante no está muy seguro de su respuesta y se queda un breve momento en silencio] [el estudiante trata de ocultar la guía de la cámara] 21 [levantando su puño derecho como en señal de victoria].
Profesora Johana: Y da 21 aja, ¡bien! O sea que se parece a lo que hizo el bueno, entonces ahora Luis, que hiciste
Luis: yo digo que son 21, porque por ejemplo abajo pongo 9, abajo pongo 9 [señala la parte inferior de su guía y con su corrector hace un movimiento horizontal indicando la forma en que la que va dispuesta la figura] y le sumo 2 y después arriba pongo otros 9 [señalando con su dedo donde debería ir la otra fila y repite el movimiento del corrector] pero le sumo 1.
Profesora Johana: Pero le sumo 1, ah bien pero esa es diferente a la que dijo él sí porque Héctor le quito 1 arriba y tú le sumaste 1 mmm bien, y tú Santiago
Santiago: Eh ¿en la cuál? [Santiago no tenía la guía lista en el punto que estaban trabajando y le tocó cambiar la hoja para ver su respuesta]
Profesora Johana: sí, en el número dos sí, de la figura 9.
Santiago: Da 21 círculos [mientras con la mano izquierda sostiene la guía con su mano derecha se rasca la mejilla] porque al 9 se le suma el 9 da 18, y se le suman 3 da 21
Profesora Johana: Uy bien, esta es diferente la que hizo Santiago es diferente, pero también vale o sea muy bien y tu Esneider.
Esneider: No [mueve su cabeza realizando una negación a causa de la pena del momento].
Profesora Johana: No, porque no lo haces, si todos, todos a ver yo quiero mirar si claro todos, entonces dice, yo leo lo que hiciste: Profe son 21 círculos porque ponen 11 en forma horizontal en la parte de abajo y en la parte de arriba se ponen 10 [mientras la profesora hace la lectura el Jimmy se come las uñas]. ¿Sí? [Los estudiantes responden afirmativamente]
Todos los alumnos: Sí.
Santiago: Y es diferente esa también.
Profesora Johana: esta también, o sea si se dan cuenta que ustedes están escribiendo cosas diferentes, pero siempre nos dan los 21 círculos [se puede ver que uno de los estudiantes está doblando una hoja], ¿bien?, tú quieres leer, ay si claro lee lee.
Jimmy: Pero otra cosa [levantando la punta del lápiz que sostiene en la mano]
Profesora Johana: bueno, otra cosa si léenos
Jimmy: Es que yo aquí le pongo 9 círculos [mira a la profesora], le sumo 2 [señalando con su mano una parte blanca de la guía] ¿sí? y luego este 9 [señalando la mesa como si tuviera las 9 circunferencias allí] lo pongo aquí arriba [señalando nuevamente la guía] y le sumo otros dos [señala con su mano el espacio donde irían las dos circunferencias y luego pone el lápiz al lado del dedo[¿sí?, eso me daría el numero pasado, es decir le resto 1 [señalando la mesa como si tuviera el 1 allí] y ya.
Profesora Johana: ah sí entendieron ¿sí?, entonces

Santiago: Hablo muy rápido
Profesora Johana: ¿Hablaste muy rápido? Bueno, más despacio otra vez despacio, yo quiero que él me explique, a ver otra vez entonces
Jimmy: es que aquí le pongo 9 círculos [señalando con su dedo el borde de la guía y haciendo un movimiento con el lápiz sobre el borde delimitando el espacio donde irían las circunferencias]
Profesora Johana: Aquí le pongo 9 listo
Jimmy: Y aquí arriba también [realizando otro movimiento horizontal pero un poco más arriba]
Profesora Johana: Y arriba también ajá, otros 9
Jimmy: O sea le sumo 2 acá arriba y 2 acá abajo [señalando cada una de las filas con el dedo] entonces a ese de acá arriba [señalando la fila de arriba con el lápiz] le resto 1 y ese 1 ya sale y ya queda
Profesora Johana: Y ya y tú cuantos círculos te dan
Jimmy: 11 y 10 [moviendo el lápiz sobre cada una de las respectivas filas] 21 y ya.
Profesora Johana: 21 ¡muy bien! Listo
Santiago: No se puede con pasto

00:05:57 - 00:11:28:
Profesora Johana: a qué número de la figura corresponde, entonces miren ya la tienen, bueno pero no la vayas a decir porque entonces, o sea yo quiero que cada uno de ustedes me escriba, por ejemplo Eneider todavía no ha entendido la pregunta, entonces otra vez miren, Esneider imagínate que Santiago hace una figura en su hoja que tiene 81 círculos, tu sabes que la figura está compuesta por 81 círculos, lo que te estoy preguntando es a que número corresponde la figura, que figura es la 4, la 5, la 6, la 7, la 8 que figura es, listo ahora si la entendiste, listo bueno entonces lee
Estudiante 8: yo lo que hice fue contando los de debajo de las demás figuras, o sea contando los círculos de debajo de las demás figuras [señala con su dedo las tres figuras propuestas en la guía], o sea de la 7 de la 8 de la… de la 7 de la 8 y de la 9 [enumera las figuras con sus dedos] para darme cuenta cuantos…
Profesora Johana: sin necesidad de construirla y cómo lo contaste a ver cuéntanos, quiero que las cuentes, cómo las cuentas
Estudiante 8: por ejemplo acá en el 1 hay tres [recorriendo con su borrador la fila inferior de la figura 1] y ya va subiendo acá [cambia a la figura 2] como si le aumentara 1 [señalando la figura dos con su borrador en la fila inferior] y acá en la figura hay dos 4, o sea le aumento 1 como si le quitara uno de estos [haciendo referencia a la figura 1] y acá en la figura 2 [señalando la figura 2 con su borrador nuevamente] hay cuatro [cambia el borrador de mano y lo deja sobre el escritorio] y le… y le qué y en la figura 3 [recorriendo la fila inferior de la figura 3 con su dedo] ahí cinco como si le quitara uno de aquí [señalando la figura 2 con su dedo]
Profesora Johana: ¿como si le quitar uno de acá?

Estudiante 8: Sí, y en la figura 4 ahí seis [baja la mano a la mitad de la hoja] y le… como si le quitara uno de aquí [señalando la figura 3 con su dedo] de los de abajo
Profesora Johana: o sea como si le quitara o le aumentara
Estudiante 8: como si le quitara [señala una figura con el dedo]
Profesora Johana: a ver cómo es como si le quitara porque es que tú me dices aquí hay cuatro y acá pongo cinco como si le quietara uno de acá, pero es que lo que yo entiendo es que si yo le quito uno me queda es tres, en cambio acá
Estudiante 9: como si le quitaran de los de arriba, o sea sería como si acá fueran cuatro [refiriéndose a la figura 2] y le quitaran uno para ponérselo acá [señalando la figura tres con su dedo]
Profesora Johana: Como si acá fueran cuál es cuál, señálame cuál es cuál.
Estudiante 9: (…) Por ejemplo acá en la figura 1 [la señala con el dedo] digamos que acá hay otro [señala el espacio donde iría la circunferencia adicional]
Profesora Johana: Aquí acá hay uno.
Estudiante 9: Sí.
Profesora Johana: Y entonces (…).
Estudiante 9: Quito ese [señalando la circunferencia imaginaria] para ponerlo acá [señala la figura 2 con su dedo].
Profesora Johana: Ah estás quitando este para ponerlo acá, a ok y entonces acá.
Estudiante 9: le quieto ese [señalando la figura 2] y lo pongo acá [señalando la figura 3]
Profesora Johana: ¿Y lo pones allá arriba? O abajo
Estudiante 9: Arriba [señalando la fila superior de la figura 3], y quito uno para ponérselo a la figura acá [haciendo referencia a la figura 4].
Profesora Johana: ¿y de acá?
Estudiante 9: y de la figura 4 le quito uno para ponérselo a la figura 5 [señalando la figura que el construyó como figura 5] y de la figura 5 le quito uno para ponérselo a la figura 6 [señalando la figura que el construyo como figura 6], y así sucesivamente.
Profesora Johana: y así hasta llegar a la figura 9, a listo ¿alguien lo hizo diferente?
Jenny: Yo.
Profesora Johana: Tú, a ver Jenny como lo hiciste
Jenny: Viendo las figuras anteriores la de 1 tiene dos círculos arriba [siguiendo su lectura con su dedo], porque el número 2 es el que después [girando su muñeca sobre su eje como en forma de semicírculo para aclarar] el que le sigue y [retoma su seguimiento de la lectura con el dedo] tres círculos abajo porque le sigue es al 2 el siguiente al 2, después, entonces yo creo que la figura 9 tiene 10 círculos arriba y 11 abajo y uno debe sumarlos y da 21
Profesora Johana: ¿Sí entendieron lo que dijo Jenny? ¿sí? Si le entendieron, o sea miren que ella lo que está haciendo es dice, esta es la figura 1 y ¿el siguiente de uno quién es?
Toda la mesa redonda: El 2.
Profesora Johana: Entonces pongo 2 y ¿el siguiente del 2 quién es?
Toda la mesa redonda: El 3.

Profesora Johana: Entonces pongo 3 ¿sí? Como estoy en la figura 9, entonces cuantos deben ir en la parte de abajo [la mesa redonda está en silencio poniendo atención a la explicación de la profe].
Toda la mesa redonda: El 11.
Profesora Johana: El siguiente, ah no perdón arriba, y el siguiente o sea el siguiente es 10 va arriba y el siguiente 11 abajo.
Estudiante: El 11 que le sigue al 10.
Profesora Johana: Si esa es diferente, esa es diferente y esa por ejemplo no la habían dicho antes no, ni acá ni allá está bien ¿alguien la construyo diferente?, tú a ver.
Estudiante 10: Sumando 9 más 9 da 18 [utilizando su dedo como si fuera una batuta] más 3 da 21 y ese es el resultado.
Profesora Johana: Ah listo, si porque también vimos que también se podía construir aumentándole 3.
Vergel: Y eso de 9 más 9 18 y 3 21 como lo haces en la figura.
Profesora Johana: Sí, enséñame acá en la figura cómo es.
Estudiante 10: Porque 1 más 1 da 2 [tapando la primera circunferencia de cada fila con sus dedos] sumándole 3 [encierra las tres circunferencias sobrantes con sus dedos].
Profesora Johana: Y en la figura número 2.
Estudiante 10: 2 más 2 4 [tachando las 2 primeras circunferencias de cada fila con su dedo] sumándole 3 [encierra las tres circunferencias sobrantes con sus dedos].
Profesora Johana: Ah ok, y en la figura 3.
Estudiante 10: 6 [levantando su dedo de la hoja] y sumándole 3 [formando un triángulo con las tres circunferencias sobrantes y su dedo].
Profesora Johana: Bien muy bien, si tú ya habías dicho también en el punto anterior, alguien más, tu Sunnerr no… ¿todos los demás lo tenemos igual? Sí seguro a ver tu Yaneth yo quiero ver el de Yaneth qué dice: para hacer la figura 9 se necesita mirar la primera pregunta y hacerla como está ahí o sea explícame eso, que tengo que hacer.
Yaneth: Mirar bien la primera [golpea la hoja con la palma de su mano].
Profesora Johana: El primero punto, ¿y seguir haciendo esto? Hasta llegar al 9 ¿sí?, también se puede así, sí también se puede así, bien listo muy bien ¿alguien más? Tú Lorena ¿qué tienes?, a ver miremos Lorena dice: La figura número 9 tiene 11 círculos [Lorena está escribiendo sobre su borrador mientras la profe hace lectura de su respuesta] y en la parte más arribita colocas 10 ¿sí? Y entonces ¿cuantos círculos nos dan? Porque eso era lo que me estaban preguntando cierto, entonces termina de escribir acá cuantos círculos hay, hay 21 porque quien le explica a Lorena porque, porque hay 21.
Jenny: 11 abajo y 10 arriba.
Profesora Johana: Ajá y entonces qué tengo que hacer, los sumo, entonces sumando tienes que escribir que sumando estos 11 círculos más estos 10 círculos me da 21, ¿listo? Muy bien.

00:11:28 - 00:13:30: de nuevo en una mesa redonda los estudiantes socializan sus respuestas obtenidas al punto número 3 de la guía
Profesora Johana: ¿Quién me explica?, yo sé que ya acabaron pero ¿quién me explica la 3?
Luis: Yo
Profesora Johana: Tú, a ver listo, porque
Luis: Yo digo que son 200 círculos [sosteniendo inmóvil el corrector que tiene en la mano]
Profesora Johana: Uy todo eso, ¿por qué?
Luis: Porque [mueve su guía hacia un lado para poder indicar con sus manos sobre la mesa], si digamos que abajo [dibuja la fila inferior en el puesto con sus dos manos] son 100 círculos y le sumo 2 da 102, y arriba [dibuja la fila superior en el aire con sus dos manos] son 100 círculos y le sumo 1 da abajo 102 [apuntando con la punta de su lápiz a la mesa] y arriba 101 y los sumo me da 203
Profesora Johana: ¿Sí?, están de acuerdo que da 203, también te dio, a todo el mundo le dio 203, cuantos te dio ¿203?, a ti cuántos te dio, no tú me estás haciendo trampa porque tú me estás adelantando, a ver yo miro, no te estás adelantando ah pero no lo habías escrito
Santiago: Sí lo copié pero me equivoqué
Profesora Johana: A ver el 3, quién le explica a Santiago cómo es el punto, ¿Quién le explica Santiago?, si tú Kevin quieres explicar si tú a ver dime explícale, a ver listo entonces a ver vamos a mirar todos vamos a ayudarle a Santiago, listo entonces a ver
Jimmy: usted colca 100 ¿sí?
Profesora Johana: O sea, espera empecemos, a ver qué es lo que yo quiero saber, yo quiero saber el número de círculos que hay en la figura 100, ¿listo Santiago? ¿Sí? O sea en la figura número 100 cuantos círculos tiene, entonces ahora si explícame
Jimmy: usted colca 100 círculos aquí abajo [haciendo el movimiento horizontal donde iría ubicada la fila inferior de la figura] ¿sí?, le suma 2 [corre otro espacio pequeño horizontalmente donde irían las otras dos circunferencias] serían 102 ¿sí?, 100 y 2 [vuelve a realizar los dos movimientos horizontales cada uno en proporción al su número] 102 ¿sí? Y a ese 102 [realiza un movimiento horizontal indicando la fila inferior] le resta 1 [señala con su dedo el final de la fila imaginaria que ha creado antes] y ese, y a ese, darían… 101 ¿sí? Y ese 101 [realizando un movimiento horizontal un poco más arriba indicando la fila superior de la figura] se lo pone arriba y suma 100 más 100 [dejando las muñecas pegadas a la mesa y los dedos hacia arriba] serían 200 más 3 203
Profesora Johana: ¿Sí entendiste Santiago?, a ver explícame tú entonces.

00:13:30 - 00:15:45:
Profesora Johana: Ah ya me acordé lo que pasa, es que Sunner hace un rato estaba pensando que si era la figura 100 tenía que poner 100 círculos abajo cierto, cierto que no, entonces a ver, a ver quién me explica
Estudiante: Intervención del estudiante no se puede oír por el ruido de fondo
Profesora Johana: 100 más 100 que me dan cuanto 200 y le sumo 3, ¿alguien lo hizo diferente? Tú a ver.

Estudiante: Intervención del estudiante no se puede oír por el ruido de fondo
Profesora Johana: tú como lo hiciste Yaneth, a ver yo saber cómo lo hiciste, cómo lo hiciste a ver cómo lo hiciste cuéntame por qué te dio 203
Yaneth: Intervención del estudiante no se puede oír por el ruido de fondo
Profesora Johana: Porque es que YANETH, miren como venía haciendo el trabajo Yaneth, o sea Yaneth siempre ha venido pero ella dice: yo observo la secuencia y voy imitando punticos voy dibujando, pero pues para hacer la figura tienes que dibujar más, entonces si no lo hiciste bien como lo hiciste, ¿cómo?, como lo hiciste ¿no?, como lo hiciste como quien como lo hizo ella como lo hizo Héctor como lo hizo quien, como el de ninguna ¿no?, como el de ella, ah listo, el de ella, pero es que como lo hiciste yo no se
Yaneth: Igual que ella
Profesora Johana: ¿Igual que ella? Sí ¿y tú cómo sabes que ella lo hizo igual que tú?

00:15:45 - 00:15:45: profe Vergel entrevista a un estudiante con el fin de poder determinar que procedimiento tienen llegar a la correcta construcción de las figuras
Yaneth: toca observar bien los…, las figuras para poder hacer bien el numero
Profe Vergel: ¿Y así haces con todos los ejercicios?
Yaneth: Sí.

Sesión 4

Profe Vergel (entrando al salón): Sesión número 4, miércoles 02 de mayo de 2012, continuamos con la pregunta tres y pregunta cuatro del instrumento No 2. Los niños están trabajando en pequeños grupos, están socializando y discutiendo sus propuestas de solución, sus respuestas.
00:00:26 – 00:00:57: estudiante 1, justificando la respuesta a la pregunta 4 del instrumento No. 2:
Luis: 81 porque, Al 81 le resto 3, el resultado que me dio lo divido en 2.
Profesora (Pregunta): ¡Ah!, sí y ¿por qué lo divides en 2?
Luis: Porque por ejemplo… cuando yo sumo 39+39 me da setenta y… ocho si y a ese resultado le tengo que sumar tres para que me dé el número de la figura <<*observa la repuesta a la pregunta No. 4 de la guía*>> *(interrumpe la profesora la explicación del alumno 1)*
Profesora (Pregunta): Y tú ¿cómo sabes qué le tienes que sumar tres?
Estudiante 1(pregunta): ¿Le tengo que sumar qué?
Profesora: ¿Sí, cómo sabes que le tienes que sumar tres?
Luis: ah por que la secuencia indica……..[la profesora interrumpe.. preguntando]
Profesora: Porque la secuencia ¿qué?
Luis: Indica por ejemplo, 39 acá abajo y 39 acá, entonces tengo que sumarle uno arriba y dos abajo, tengo que restarle tres.

Profesora: ¿Sí?, ¿todos de acuerdo?, entonces vamos hacer una cosa, yo quiero que le expliques, vamos a cambiar aquí de puesto, hazte aquí Edwin, y quiero que le expliques eso a Kevin, hazte acá! eso cambiemos de lugar, eso!, listo entonces, Explícale a Kevin lo que me acabas de decir, ¿listo?

Kevin: ¿Yo?

Luis: Yo digo que son [la profesora interrumpe diciendo, pero aquí], yo digo que son 39 porque, al 81 le tengo que restar 3 no?, y el resultado que me dio lo divido en dos.

Profesora: Sí, bueno y por qué fue que me dijiste que, él me dijo que le iba a restar 3, porque en la secuencia lo decía, ¿cierto? Tú me dijiste eso, y entonces por qué lo vas a dividir en dos, o sea le restas tres y ¿por qué lo divides en dos?

Luis: Por lo que... Tengo que sumarle dos números exactamente iguales, por ejemplo el 39, al 39 tengo que sumarle otros 39 y a ese resultado que me dio le sumo 3 y da 81.

Profesora: ¿sí? De acuerdo ustedes [refiriéndose a los otros estudiantes], a ver yo quiero mirar otras respuestas, ustedes que escribieron, tú ¿Qué escribiste? [Refiriéndose al estudiante 2]

Estudiante 2: Yo pienso que… porque si yo al 81 le tengo que restar 3 y el resultado que me da siempre tengo que dividirlo en 2, que me daría 39

Profesora: entonces la figura es 39, ¿qué tienes tú? Dime lee [refiriéndose al estudiante 3]

Estudiante 3: yo pienso que si yo le pongo 81 ¿sí?,81 círculos y los encierro ¿sí?... entonces si yo pongo 81 y resto 3 me darían... 78 y eso es lo que divido entre 2 y daría 39, o también hay otra forma eh hacer 39+39

Profesora: hacer 39+39 y ¿Qué más?

Estudiante 3: Y sumarle 3

Profesora: Y sneider, yo quiero mirar la de Esneider. Dice: ah miren lo que dice Esneider. Esneider dice, profe, la figura es la 39 porque abajo pones 34 y arriba pones 33. Ustedes ¿Qué dicen?

Luis: 34 no, abajo tiene 41

Profesora: Y ¿Por qué? 34 explícame por qué?[interviene Edwin]

Luis: Abajo tienen que haber 41 porque a 39 tengo que sumarle 2 [utilizando los dedos para contar dice:] 40 41 y arriba tiene que poner (…) 40 exactamente, por eso da 81.

Profesora: O sea, tú dices que ¿no puede ser 34? En la parte de abajo, y tu ¿por qué dices que si? Esneider. ¿Por qué 34?

Esneider: porque 30 y 30 dan 60.

Profesora: 30y 30 dan 60 si y ¿Qué más?

Esneider: (…) Y el que me da lo divido.

Profesora: No, otra vez 30 y30 dan 60 y el 7 ¿de dónde lo sacas?

Sneider: Del 4 y del 3, 34 y 33(…).

Profesora: Bueno, vamos a ver si entendemos. Si tú sumas 34 y 33 círculos ¿Cuántos círculos tienes?

Esneider: 67.

Profesora: Mira que me están diciendo que es una figura que tiene 81 círculos ¿ves?

Sneider: Y dividiéndolo por 2 el número que me dio.
Profesora: Pero mira si tú pones 34 círculos abajo y 33 arriba ¿cuantos círculos tiene Esneider?
[varios responden] 67.
Profesora: Listo entonces es lo que yo te quiero decir pero es que mira que estamos averiguando la figura que tiene 81 círculos
Esneider: Por eso dividiendo el (…) 67.
Profesora: ¿Qué es lo que divides?, ¿el 67?, ¿lo divides?. Y ¿cuánto te da?
Esneider: (…) Umm no.
Profesora: ¿Quién le explica a Esneider?, Luis ya explicó. Entonces ahora quiero que explique otro Tú, ¿sí?, explícale a Esneider, mira la solución que tienen ellos [dirigiéndose a Esneider]
Estudiante: Usted tiene que restarle al 81 tres el resultado lo tienes que dividir por 2.
Profesora: Pero explícale a Esneider ¿por qué tienes que restarle 3?
Estudiante: Porque la secuencia lo dice, porque por ejemplo aquí, 2 y le sumamos 2, esta es la figura 2 entonces se colocan dos círculos más, más dos, me darían 4 y al cuatro le resto 1 y le pongo 3 arriba.
Profesora: Y acá ¿Cómo sería?, en la figura 3 .
Estudiante: Acá ponemos 3 círculos, y le sumamos dos y a ese 5 le restamos 1, que me daría 4 [interviene la profesora].
Profesora: Y los pones arriba, entonces ¿Por qué al 81 le restas 3?
Esneider: Porque como hay varias formas de hacerlo.
Profesora: ¿Por qué?
Luis: Porque la secuencia siempre, en todos pone por ejemplo 39, 39 círculos abajo y 39 círculos arriba y hay que sumar otros 3 círculos más.
Profesora: ¿Siempre? A ver, expliquémosle a Esneider porque Esneider no nos cree miremos lo que dice Luis. Entonces miremos a ver lo que dicen ellos, la figura 1, ¿Qué pasa?
Luis: Tomo un círculo acá abajo y otro arriba y entonces tengo una torre de tres [indicando la figura 1 con su lápiz].
Profesora: Ahora la figura 2.
Luis: Pongo dos acá y dos acá, y también pongo la misma torre de 3 que esta acá [señalando la figura nuevamente mientras explica]
Profesora: ¿si estás de acuerdo Esneider?
Luis: Y hagamos la 3, pongo tres, tres y también la torre de tres [señalando la figura 3]
Profesora: ¿Sí ves Esneider lo que está diciendo Luis?, mira entonces siempre estoy aumentando 3, ¿listo?, entonces ¿qué pasa si tienes 81 círculos? ¿qué pasa? [se interrumpe el video] minuto 7:07
Minuto 7:20 Profesora: Y ¿en todas las otras figuras de la secuencia va a pasar lo mismo?
Luis: si por que…. Uno dos, tres, cuatro, cinco. Y aquí está la torre.
[señalando la figura en la hoja].

Profesora: Um ya, ah ok de acuerdo Esneider, entonces ahora sí, por ejemplo si yo quisiera averiguar qué número de figura es esta de aquí, que hago [señalando la figura 3 en la hoja]
Luis: Pues… le quito 3.
Profesora: Le quito 3, ¿a quién? , al número de círculos, o sea ¿cuantos círculos hay ahí? Mira Esneider, ¿cuántos círculos hay ahí?
Luis y Esneider: 9 [responden].
Profesora: Y le quitas 3, quítale 3 .
Luis: Me quedan 6.
Profesora: Y entonces ¿qué hago?
Luis: Y entonces al 6 lo divido en dos.
Profesora: Y ¿me da?
Luis: 3.
Profesora: La figura 3 ¿viste?, y si yo quisiera hacer eso con la figura 2, entonces ¿Cómo hago?
Luis: Le quito la torre de 3.
Profesora: O sea, ¿Cuántos círculos hay en la figura 2?
Varios responden: Eh (…) 7.
Profesora: Y le quito ¿Cómo es lo que tú dices?, ¿Le quitas qué?
Luis: La torrecita que tiene acá.
Profesora: Y entonces ¿cuántos quedan?
Luis: Y el resultado que me dio lo divido en dos.
Profesora: Y ¿cuánto me da?, la figura 2, entonces ahora si expliquémosle con la 81, ¿si viste? Lo que está haciendo, entonces con la 81, le volvería a quitar ¿Qué?, la torre de 3, y si a 81 círculos le quito la torre de 3, ¿Cuánto me da?
Luis: 72.
Profesora: ¿Sí?, nooo, 81…. [Alguien dice 78], listo y 78 lo divido en 2, divídelo en 2, a ver otra vez, 81, ¿cierto?, quítenle 3,… ¿Cuánto te da?, a ver a 81 quítenle 3.
Luis: 78.
Profesora: Bueno y ahora divídelo en 2, divídelo, divídelo, haz la división .
Luis: [murmura cálculos de la división].
Profesora: Y entonces ¿Cuánto dio?, 39 quiere decir que estamos hablando de la figura 39, ¿sí?, ¿de acuerdo?, pero entonces mira, quiero que vean esto, ¿Por qué esta respuesta no es? Pues porque si yo tengo 37 y 33 círculos pues no me van a dar los 81, ¿listo? , empezando por ahí, (min 9:54)[se corta el video]
Grupo de niñas
Profesora: Entonces les voy a leer lo que decía ..[no se entiende… lee un problema], entonces quien me comparte la respuesta, ¿tú?
Jenifer: La figura 39 porque (…) sumas 39+39 te da 78 y le sumas 3 te da 81.
Profesora: ¿Quién tiene otra respuesta?, a ti ¿Qué te dio?, 39, 39, 39 [revisando las respuestas de los estudiantes], ¿Qué te dio Adriana?, no te dio la figura?, bueno entonces vamos a mirar estas respuestas?, ¿listo?, entonces bueno, acá les dio figura 39, hicieron lo

mismo, ellas dos hicieron lo mismo, sumaron 39 círculos más 39 círculos, luego aumentaron 3 y les dio 81, ¿aquí tu qué hiciste Adriana?[murmura cálculos la profesora], pero yo quiero que me cuentes, ¿Por qué están sumando 39+39.

Estudiante: Porque 39+39 es (…) 78 y más 3 (...) 81

Profesora: Y por qué más 3 y por qué no puede ser 2

Varias responden: Porque seria 80

Profesora: Ah por qué daría 80, bueno y ¿no puedo sumar otro número?, por ejemplo que pasa si yo sumo 40+40 y le sumo 1.

Estudiante: Esa también.

Profesora: ¿Esa también da? Ósea que también ¿es la figura 40?, ¿sí o no?, a ver qué pasa, por qué por ejemplo ¿no puedo hacer eso? Por qué ustedes están sumando 39+39 le suman 3 y da 81, entonces mi pregunta es ¿siempre tengo que sumar 3? O no.

Profesora: ¿Tú por qué crees que sí?

Estudiante 2: Porque así son todas las figuras.

Profesora: ¿Por qué así son todas las figuras?, a ver yo quiero mirar, muéstrame.

Estudiante 2: porque 3 más 3 da 6[señalando la figura].

Profesora: 3 más 3 da 6, acá, en está cierto, y le sumo tres, y ¿en esta figura?

Estudiante 2: 2 más 2 da 4 y le sumo 3[señalando la figura].

Profesora: Y ¿en está?

Estudiante 2: Uno más uno 2 y le sumas 3,

Profesora: O sea que siempre estoy sumando ¿Cuánto?

Estudiante 2: 3.

Profesora: O sea que yo no podría sumar 1, porque entonces ya no estaría ¿qué?... respetando esta secuencia, ¿listo?

Profesora: Ahora quiero que ustedes me hagan el favor y le expliquen Adriana, vamos a ver que escribió Adriana, [la profesora lee la respuesta de Adriana], yo la encontré sumando 79 más 2 81 después dividí el número y dio 40 y 41, explícanos por qué pensaste eso, porque escribiste eso.

Jenny: Porque yo sume 79+2 y dio 81despues dividí el número y me dio 40 y 41, pero yo no sé cuál es la figura, 41 seria acá abajo y 40 acá arriba.

Profesora: Ah bueno, entonces miren lo que está haciendo, entonces tu estas colocando 41 abajo y 40 arriba, y por qué no al revés, por qué no 40 y 41.

Jenny: porque el número mayor tiene que ir abajo.

Profesora: ¿El número mayor tiene que ir abajo?, ¿Por qué?

Jenny: En las anteriores el número mayor esta abajo [señalando con los lápices, la guía de trabajo].

Profesora: El número mayor esta abajo umm, y ¿tu cómo construiste estas de acá?

Jenny: Eh umm es que mira la de arriba el número que le sigue es el dos acá arriba y el que sigue al dos es el 3 y está acá bajo, lo mismo al 2, el 3 es el que le sigue y el 4 acá abajo

Profesora: ah listo entonces mira, recordemos que Jenny siempre ha construido la secuencia así, ella siempre dice, este es 1 el siguiente lo coloco arriba y el siguiente, el 2 lo coloco abajo, ¿cierto?, siempre has hecho eso, pero entonces con esa manera de construir, si yo te diera solamente estos circulitos y te preguntara por el número de la figura como haces para sacarlo.

Laura: El número anterior.

Profesora: Ah el número anterior a cuál.

Laura: A los de arriba.

Profesora: A los de arriba, será que si, a ver entonces vamos a mirar, entonces miren lo que dice Laura es lo siguiente, pues si Jenny los está construyendo así Esta es la figura 1 este es el siguiente, el siguiente de uno es 2 y el siguiente de 2 es 3, ¿listo?, entonces ella dice, bueno, entonces pues simplemente a este de arriba ¿Qué?, le quito 1, cuantas hay abajo

Estudiante: [No se reconoce si es Jenny o Laura]: 4

Profesora: y me da el de abajo…3, miremos acá, ¿será que pasa lo mismo?, al de arriba le quito 1 y cuanto me da

Estudiante: [No se reconoce si es Jenny o Laura]:3

Profesora: O sea que también me da, al de arriba, le quito una y me da una, entonces si Jenny dice que hay 41 abajo y 40 arriba ¿Qué número de figura es?... miren, si ustedes tuvieran, es decir si tuviéramos la figura con los 81 círculos y 41 aquí y 40 arriba,[haciendo una línea con un lápiz indicando abajo y arriba] según lo que nos acaba de decir Laura, ¿Qué figura es? Porque miren esto esta tiene 1, 2, 3, 4, 5 [enumerando los círculos de la figura 3] y arriba 1, 2, 3, 4, Laura dice pues quitémosle una arriba y me da el número de la figura ¿sí? Entonces acá cuál sería el número de la figura si hay 40 arriba

Estudiante: [no se reconoce si es Jenny o Laura]: seria 39

Profesora: Sería 39 ¿viste? Entonces mira esa es otra manera también para hallar el número de la figura, y ¿por qué no podías ver el número de la figura[se corta el video min 16:29]

Profesor: Bueno, entonces quienes son los de 4° Yaneth Kevin, son de 4° y Sunner, y Luis y Jimmy son de 5°, ¿Qué vieron ustedes en tercero, de matemáticas?

Estudiante 1: Fracciones eh vimos ..

Luis: Nosotros vimos divisiones, todo sumas restas multiplicaciones

Profesor: En cuarto!

Luis: Sí en 4°

Profesor: Y ustedes en 3°

Sunner: En matemáticas nos hicieron las fracciones, suma resta y multiplicación.

Profesor: ¿De fracciones?

Estudiante 1: si, multiplicación con suma

Profesor: Um ya

Luis: Ah y números primos y compuestos [se corta el video min 17:29]

Profesor: Y ¿por qué 39?... por qué este número 39 de donde sacas ese número 39

Yaneth: (…)

Profesor: De algún lado te debió salir el 39 ¿cierto? tu como lo hiciste Sunner

Sunner: Pensando como en la secuencia hay acá, que aquí hay 2, 2 , acá 1 más 1 da 2 más 1 da 3 y así siguiendo la secuencia y me dio 39 más 39, 81

Profesor: O sea que el 39 te salió de ¿Dónde?
Sunner: De la secuencia
Profesor: ¿De la secuencia?
Sunner: Ajá y después puse 79 más 3 y me dio 81
Profesor: Y si yo te pregunto por ejemplo, que tal que Santiago no haya tenido 81 círculos, si no que hubiera tenido por ejemplo 273 círculos ¿cómo lo haces ahí?
Sunner: Siguiendo la secuencia
Profesor: Claro, pero no 81 círculos, si no 273 círculos, entonces como seria, con 273 círculos como es el procedimiento., por ejemplo, Luis, si tenemos no 81 círculos, porque ya lo hicieron si no 273 círculos, como lo haces, explícamelo por acá
Luis: 135
Profesor: Explícanos a todos por que
Luis: Porque al 273 le resto 3 y el resultado que me dio que fue 270
Profesor: Escribe ahí.
Luis: 270 lo divido en 2
Profesor: Este 270 de ¿Dónde te sale?
Luis: Como al 273 le quito 3
Profesor: Entonces escribe aquí al 273 le quito 3, para que quede al 273 le quito 3 escribe,
Luis: [Murmura mientras escribe] al 273 menos 3
Profesor: Y luego que haces con el 270
Luis: Lo divido en 2
Profesor: Lo divides entre 2
[Luis se hace los cálculos en una hoja de papel]
Profesor: y te da 135, ¿y la figura es la 135?
Luis: Sí
Profesor: y ¿por qué divides entre 2?
Luis: Por lo que la secuencia me dice
Profesor: Primero ¿por qué al 273 que yo le pregunte a Yaneth le pregunte a todos, tú le quitas 3?
Luis: Porque ahí indica todo porque por ejemplo 135+135 me da 270 y al 270 le sumo 3 igual que acá por ejemplo esta es la figura 2 al… 2 le sumo otros 2 ee 2+2 y le sumo otros 3 por lo que acá siempre va a dar, igual que en la figura 1 al 1 le sumo otro 1 y le sumo 3 ósea esta torre [señalando las figuras en el papel]
Profesor: Tú que estas mirando primero la fila de arriba o la fila de abajo
Luis: La de abajo
Profesor: Primero miras la de abajo, tu ¿Cuál miras? [Refiriéndose a Yaneth] tu que eres muy buena mirando cuando yo te presento la figura esta ¿Cuál fila miras? La fila de círculos de arriba o la fila de círculos de abajo
Yaneth: Siempre la de abajo
Profesor: ¿La de abajo?, ¿Por qué?

Yaneth: Porque si uno ve la de arriba no le da bien el resultado, y en cambio abajo si le queda bien

Profesor: Umm y ¿tú que dices Kevin?, tu por ejemplo frente a esta figura, que miras primero, los círculos de arriba o los círculos de abajo.

Kevin: De abajo

Profesor: ¿Por qué?

Kevin: Porque si…nosotros miramos la de arriba no se va a ver bien, en cambio si miramos la de abajo se va a ver la figura

Profesor: Cuando dices que no se va a poder ver bien, ¿qué es lo que ves?

Kevin: (…) Otra figura

Profesor: ¿Eso fue lo que tu llamaste qué?, ¿la torre? [Refiriéndose a Luis]

Luis: la torre de 3

Profesor: Y entonces si ven arriba, arriba no se ve bien la torre, ¿tienen que verla abajo?

Parte 2: 00:23:03 – 00:41:19

Profe Vergel: Yaneth tú le entendiste bien a Luis ¿por qué le resta tres y luego lo divide entre dos? [Yaneth mueve la cabeza de manera afirmativa] sí, bueno y si yo te pregunto a ti [Él profe le voltea la guía para que Yaneth responda por el respaldo de la guía], todos estén alerta, pero yo te pregunto a ti, yo quiero saber si yo tengo…, 721 círculos, si quieres escribe con lápiz ahí [El profe le indica con su dedo índice el respaldo de la guía], cada uno, si quiere Sunner aquí atrás, Kevin aquí atrás, Jimmy aquí atrás [El profe les devuelve la guía a cada uno de ellos]. Entonces ahora, ahora, si quieren copien así, ahora Santiago, copien y yo les dicto.

[El profe les dicta el ejercicio] Ahora Santiago tiene 721 círculos, entonces ¿a qué figura corresponde? [Los niños están copiando el ejercicio y la cámara enfoca lo que esta copiando Kevin], ¿a qué figura corresponden?, entonces Luis, Luis ha explicado un procedimiento, si, lo puede repetir Luis por favor:

Luis: Mmm, al 721 le resto tres y al resultado que me da lo divido en dos, y ese es el número de la figura que me da [Luis mira el ejercicio que escribió al respaldo de la guía].

Profe Vergel: Y ese es el número de la figura que da [afirma],

Luis: Y ese es el número de la figura.

Profe Vergel: Si. Saben ¿por qué Luis le resta tres? [Les pregunta a los demás alumnos].

Luis: Porque en todas la figuras a cada lado [Luis muestra las figuras que hay en la guía e indica la figura No 2]. (Interrumpe el profe la explicación del Luis).

Profe Vergel: Entonces voy a preguntarle a Jimmy. ¿Por qué Jimmy crees que Luis, o por qué están de acuerdo de que le restan tres, cuándo yo le doy el número de círculos, por qué será? [Jimmy mira las figuras de la guía, luego pasa la página]. Jimmy…

Profe Vergel: Y la otra pregunta es y ¿por qué se divide entre dos?, ¿Por qué es que se divide entre dos?

Luis: Por (…) porque, se divide entre dos, porque le tengo que restar tres, porque esta es la torre que siempre le va a sumar, le va a sumar una torre de tres que es la que le va sumar a todas [Señala la figura No 3, No 2 y No 1 de la guía con la mano], porque siempre le va sumar: primero por ejemplo la figura 3 le tengo que sumar otros tres y dan 6, pongo tres abajo y tres arriba[va señalando con el lápiz la fila 2 y luego la fila 1 de la figura No 3], entonces después cojo una torre de tres, torre de tres y la cojo y ¡Pa! La pongo acá [Indicando con su mano la figura No 3 al final de las filas 1 y 2] y ahí están todas, entonces a eso cojo y le quito la torre de tres lo divido en dos [señala con el lápiz ambas filas de la figura No 3] y esa es la figura.

Profe Vergel: Pero ¿Por qué lo divides en dos? [Le pregunta a Luis], o sea ya entendemos porque le restan tres, pero la pregunta es: ¿por qué?, ¿por qué?, ¿por qué cuándo le restas tres, ha ese número que te queda lo divides entre dos? Y ¿por qué no dividirlo entre 4 o dividirlo entre 10 o dividirlo entre 5? ¿Por qué hay que dividirlo entre 2?

Luis: Nooo, porque, porque no se puede, porque si lo divido entre 2 no le va a dar el número correcto porque… (Interrumpe el profe la explicación del Luis).

Profe Vergel: No, No, pero, pero después de restarle 3 ya tienes el número y ese número que te queda ustedes lo están dividiendo entre 2. La pregunta es ¿por qué lo divides entre 2? [Le pregunta a Luis].

Luis: (…) Acá tienes 3[subraya la torre en la figura No 3]

Profe Vergel: Sí, muy bien

Luis: Entonces aquí lo divide en 2 [señala con el lápiz la fila 1 de la figura No 3], y acá en tres y ese es el número de la figura. [Señala con el lápiz la fila 2 de la figura 3]. (Interrumpe el profe la explicación del Luis)

Profe Vergel: Ah bueno, pero ahí, ahí, ahí está respondiendo porque dividir entre 2. [Luis observa la figura No. 3].

Luis: (…) Mmm [Luis observa la figura No. 3].

Profe Vergel: Tú qué dices Jimmy ¿por qué se divide entre dos? Kevin ¿por qué se divide entre dos? [Le pregunta a Jimmy, Kevin el cual ríe y se balancea en la silla], o sea, ya, ya tienen la torre sí, tienen la torre, la torre es una torre de 3 círculos [el profe señala con el dedo índice la figura 3 de la guía de Luis], al número que yo les doy, le restan la torres, o sea los tres y al número que les queda ustedes lo están dividiendo entre dos. Yo quiero que me explique. Yo sé que tienen la respuesta, pero yo quiero que me expliquen ¿por qué dividen entre dos? Y si a mí se me ocurre dividir entre 10. ¿Por qué no dividir entre 10? O ¿por qué no dividir entre 3? O ¿por qué no dividir entre 4? ¿Por qué tienen que dividir entre 2?

Jimmy: Porque (…).

Profe Vergel: ¿Por qué Jimmy?

Jimmy: Porque (…) la torre de 3 le tiene que restar uno y da dos. [Señala la fig. 3 con el lápiz]. (Interrumpe el profe la explicación del Jimmy).

Profe Vergel: A la torre de 3 le restas 1 y te da 2. [Dirigiéndose a Jimmy].

Jimmy: Si le tengo que restar.

Profe Vergel: O sea, ahora a la torre le restas 1.

Jimmy: Si.

Profe Vergel: Y por qué le restas 1.

Jimmy: Porque…, [toma la hoja y se queda pensando y observando las figuras No 1, 2 y 3 de la guía]. Porque en la primera se coloca uno sí. [Señala con el dedo la fila 2 de la figura No 1].
Profe Vergel: Tu qué dices Yaneth. Tu sabes por qué le restamos tres [El profe señala la guía de Yaneth con el dedo].
Yaneth: mmm, Porque…, [Yaneth coge la guía con la mano].
Profe Vergel: Por qué le restamos tres.
Yaneth: Mmm…, viendo las figuras así [señala con el lápiz la figura 1] acá tres, acá se le ponen tres.
Profe Vergel: Sí
Yaneth: Entonces a este se le suma tres [voltea la hoja por donde escribió el ejercicio que el profe les dicto], para que le pueda dar bien el resultado.
Profe Vergel: Y al número que te dio, ¿qué le haces después? [Yaneth se queda pensando], dice Luis que se divide entre dos.
Yaneth: Se divide entre dos porque así… (Interrumpe el profe la explicación del Yaneth).
Profe Vergel: Y por qué crees tú que se divide entre dos [Le pregunta a Yaneth mientras ella intenta realizar la operación].
Yaneth: Para poder…, hacer. Para que se forme bien la, la figura, o sea para que se pueda hacer bien el número. [Índica con el lápiz una operación al respaldo de la hoja].
Profe Vergel: Bueno, entonces ahora les voy a cambiar la pregunta, ok. La colocan detrás. La pregunta es la siguiente: ¿Cuántos círculos?, si quieren copien, ¿Cuántos círculos tiene la figura ocho mil?, ¿Cuántos círculos tiene la figura ocho mil? Cada uno piense.
Nota: Hay un defecto en el video en el minuto 29 con 48 ser...
Profe Vergel: Otra vez para aclarar, si yo les pregunto, otra vez para aclarar y vamos a escuchar un momentico a Luis. Si yo les pregunto ¿cuántos círculos tiene la figura 100, qué es lo que contesta Luis?
Luis: 203.
Profe Vergel: Él dice 203, Cómo haces para encontrar 203[Le pregunta a Luis], Explíquenos.
Luis: Porque, al 100 tengo que sumarle otros 100, o sea tengo que doblar el resultado. El resultado que me da, o sea 200 le pongo 3 más, que siempre es la torre de 3 que le voy a poner a las figuras. [Observa y señala la figura No 3].
Profe Vergel: Bueno y si fuera la figura 600. Con ese procedimiento que ha explicado
Luis: 1203.
Profe Vergel: Con ese procedimiento que ha explicado Luis, si la figura es 600, entonces qué, qué es lo que hace. 600.
Luis: 1203.
Profe Vergel: Y de dónde te sale el 1203.
Luis: A 600 le tengo que sumar otros 600. [Responde mientras molesta con las manos].
Profe Vergel: Y, y tu sabes porque Luis dice que a 600 tiene que sumarle otros 600 [Dirigiéndose a Sunner].

Sunner: Por…, como multiplicando el resultado.
Profe Vergel: Si, y por qué lo multiplica. [Sunner se queda pensando]. Porque lo podría dividir, pero él está multiplicando el, el que yo le doy por dos. ¿Por qué?
Sunner: Para saber… [Mira las hojas], la cantidad de círculos que hay
Profe Vergel: Y eso tiene qué ver algo con la secuencia [Le señala las figuras 1, 2 y 3 a Sunner].
Sunner…,
Profe Vergel: Con la forma cómo se presenta.
Sunner: …, Sí.
Profe Vergel: Por ejemplo si yo te pregunto a ti Sunner: ¿Cuántos círculos?..., o no ¿cuántos círculos?, miren, miren, escuchen la pregunta que yo le voy hacer a Sunner. Así sin escribir nada, me vas a escuchar nada más, ¿cómo hace para hallar?, ¿cómo haces para hallar el número de círculos?, sí, ¿cómo haces para hallar el número de círculos que tiene la figura 2000?
Sunner: mmm…., multiplicando el resultado, entonces sería 4000…, 4000… [Mira a Kevin],
Kevin: 4003.
Sunner: 4003. [Mientras mueve las manos].
Profe Vergel: Ahora entonces llegamos a 8000. Entonces Kevin ¿Cómo haces?, ¿cómo haces para hallar el número de círculos de la figura 8000?
Kevin: …, [Sunner lo mira y frota los lápices mientras piensa la respuesta].
Profe Vergel: No, no importa que no me multiplique pero dime ¿cómo lo haces?, dime el procedimiento.
Kevin: [Kevin se ríe] (…) eh (…) que
Profe Vergel: Porque qué tal que el número sea grandísimo, bueno 8000 es grande. Bueno pero cómo haces para la figura 8000, explica el procedimiento nada más no importan los cálculos.
Kevin: (…) Toca multiplicar por dos [mientras toma la hoja y la endereza].
Profe Vergel: Sí.
Kevin: y a lo que multiplico [mueve las manos debajo de la mesa] toca sumarle tres.
Profe Vergel: Y por qué le sumamos tres, yo estoy intrigado con ese tres. ¿Por qué hay que sumarle tres?
Kevin: Porque…, [Luis interrumpe a Kevin y responde].
Luis: Porque siempre le sumamos uno acá, la torre [Luis señala la figura No 2 con la mano haciendo énfasis que ahí va la torre].
Profe Vergel: Jimmy la figura 80.000, imposible de dibujar cierto [El profe mira a Jimmy y Jimmy mueve la cabeza de manera afirmativa], la figura 80.000, explícame el procedimiento para hallar el número de círculos de la figura 80.000. [Mientras tanto Jimmy tiene el lápiz apoyado al respaldo de la guía].
Jimmy: …, ish!, le sumo, le sumo otros 80.000, que daría un millón seiscientos [cogiéndose el codo], sí. [El profe interrumpe a Jimmy]

Profe Vergel: Bueno, ciento sesenta mil, no importa, si y luego [Jimmy se coge la cabeza con las manos y observa el respaldo de la guía].
Jimmy: serian ciento sesenta mil luego le sumo tres.
Profe Vergel: Luego le sumo tres, bueno ahora, ahora yo les digo lo siguiente, para todos, para todos, aquí, mírenme acá, estoy hablando de la figura 1000, estoy hablando de la figura 2000, he hablado de la figura 8000, y he exagerado mucho y he hablado de la figura 80000, ustedes han respondido muy bien, y si yo les pregunto a ustedes, si me atrevo a preguntarles a ustedes, bueno eh, ya no es la figura ni 1000, ni 2000, ni 8000, ni 80000, sino que es, una figura una figura cualquiera, una figura cualquiera, cualquiera puede ser 1000, puedes ser 2000, puede ser 8000, puede ser 80000, una figura cualquiera, si porque yo también les puedo preguntar la figura 3.458.678 y si yo les pregunto no esa figura sino, bueno y cuantos círculos tiene la figura 80.425.700… y yo exagero, entonces si la figura es una figura cualquiera, cualquier figura, como ¿Cómo harías tu Jimmy?
Jimmy: [entre cruza las manos y las pone bajo su quijada, posteriormente las suelta y responde] cualquier figura
Profe Vergel: Si, si fuera cualquier figura
Luis Felipe: la que uno escogiera [inclinando su cuerpo hacia el espaldar de su silla]
Profe Vergel: la que quieras
Jimmy: la 10.000.
Profe Vergel: la 10.000 por ejemplo, el para cualquier figura tomo la 10.000, pero ya sabes el procedimiento, entonces ese 10.000, ¿qué es lo que haces con ese 10.000?
Jimmy: le sumo otros 10.000 [levantando su hombre izquierdo].
Profe Vergel: le suma otros 10.000 y al resultado.
Jimmy: le sumo tres.
Profe Vergel: le suma tres, he para ti ¿Qué es una figura cualquiera? Kevin.
Kevin: [se encuentra con los brazos cruzados] que le puede… [se lleva un dedo a la boca y responde] sumar restar.
Profe Vergel: si pero de estas, por ejemplo cuando yo le pregunte a Luis una figura cualquiera él me dijo, pues para mí una figura… para Jimmy una figura cualquiera puede ser la 10.000, para ti una figura cualquiera, ¿para ti una figura cualquiera, cual puede ser?
Yaneth: … [Mira hacia arriba y Sunner baja la cabeza y le sopla el 30.000] la 30.000
Profe Vergel: por ejemplo, para Yaneth una figura cualquiera puede ser la 30.000, pero ¿una figura cualquiera puede ser la 5?
Yaneth: [llevándose un dedo a la boca] no.
Kevin y Yaneth: Sí.
Profe Vergel: Jimmy dice que no, que una figura cualquiera no puede ser la número 5, por qué no Jimmy o si, quien dijo no, tu que porque dices que si Kevin, una figura cualquiera puede ser la numero 5.
Kevin: Porque es igual que la cinco sino que… es igual… le suma 5 y (…) [rascando los lápices con las uñas].

Profe Vergel: y luego le sumamos el 3, por ejemplo Sunner, para ti una figura cualquiera ¿Cuál puede ser?
Sunner: ehh [sosteniendo los dos lápices de punta y punta con ambas manos]… 6.000
Profe Vergel: la figura 6.000, para ti.
Kevin: la 40.000 [mientras sostiene el borrador entre sus manos].
Profe Vergel: para ti.
Luis Felipe: 11.000 [levantando el hombre izquierdo].
Profe Vergel: Para ti.
Jimmy: [se inclina hacia adelanta ya que estaba recostado sobre el espaldar y mira hacia arriba para responder] 80.000.
Profe Vergel: para ti, otra figura cualquiera.
Sunner: ehh… [Aprieta los labios] la 50.000.
Profe Vergel: la 50.000, para ti Yaneth.
Yaneth: la 20.000 [pone los lápices en su boca].
Profe Vergel: la 20.000, una figura cualquiera puede ser la 20.000, [sosteniendo la hoja para que toda la mesa redonda la pueda observar] cuando yo les presento, la secuencia que ya ustedes saben que esto es una secuencia, ¿cierto?, una secuencia yo quiero que me digan cada uno, lo voy a dejar pensar un ratico pero no mucho tiempo, no crean que son dos días, un ratico nada más, es cuando ven la figura, la figura 1, la figura 2, cuando ven cada figura, ¿Cuándo ven la figura que es lo que ven, que es lo que primero ven? ¿Ok?
Profe Vergel: ¿diferente a las figuras?
Sunner: Sí [Haciendo un movimiento con la cabeza de confirmación].
Profe Vergel: Bueno, explícame eso.
Sunner: Por ejemplo [señalando con un dedo la guía], por ejemplo la 1 tiene más, no tiene ni 1 ni 2, sino tiene 5 [señalando con toda su mano la figura de derecha a izquierda]
Profe Vergel: Sí.
Sunner: Ah cambio la 2 (…) tiene [señalando con su dedo la figura] 7, eh si 7, si 7, tiene 7 mayor que el que la 1 [señalando de nuevo la figura 1]
Profe Vergel: Sí.
Sunner: a cambio la 3 tiene más que la 2 y que la 1 [señalando respectivamente cada figura con su mano], entonces así son diferentes cada una [señalando las tres figuras al tiempo con movimientos horizontales de lado a lado de la hoja].
Profe Vergel: y tú que ves Sunner, cuando ves la secuencia que vez.
Yaneth: Mmm también figuras diferentes.
Profe Vergel: figuras diferentes, tú ves algo como filas superiores filas inferiores o filas de arriba filas de abajo, o eso no lo ves tú.
Yaneth: no, es que aquí [señalando la guía con su dedo] yo veo, en la primera.
Profe Vergel: en la primera [señala la figura 1 con su lápiz].
Yaneth: es mayor la de abajo que la de arriba [moviendo su lápiz, como en un tiro parabólico, para hacer referencia primero a la fila inferior luego a la superior].
Profe Vergel: Sí.

Yaneth: En la segunda es mayor la de abajo que la de arriba [haciendo el mismo movimiento parabólico de segundo atrás], entonces así va haciendo el aumento [moviendo su lápiz en círculos para indicar que el procedimiento es cíclico].
Profe Vergel: Ajá.
Yaneth: y acá mire [señala nuevamente al guía con su lápiz], aquí va haciendo (…)
Profe Vergel: No pero ahí está bien, Kevin ¿cuándo te enfrentas a la figura que ves? Yo quiero que digas que ves tú, ¿figuras diferentes?, y que más ves, ves algo distinto a lo que vieron Sunner y Yaneth, o ves…
Kevin: (…)
Profe Vergel: tu Luis, ves algo distinto a lo que ven ellos tres o (…).
Luis: Sí algo distinto.
Profe Vergel: ¿Qué ves?
Luis: Que en cada figura, por ejemplo en esta son cinco [señalando con su dedo la figura 1] ¿no?, la siguiente son 7 [haciendo un movimiento circular con su mano], la siguiente son 9 [repitiendo el movimiento circular de su mano], entonces la siguiente serían 11 [ya no repite el movimiento circular sino que trae su mano contra su pecho], porque siempre se le va sumando 2, entonces la siguiente son 13 [retomando el movimiento circular de su mano], la siguiente 15.
Profe Vergel: ¿siempre se le van sumando cuánto?
Luis: 2.
Jimmy: 3.
Profe Vergel: ¿2?, pero aquí dice Jimmy que 3.
Luis: no, en el resultado, por ejemplo estas son cinco [señalando la figura 1 con su lápiz] entonces el resultado [encerrando la figura 2 en un círculo con su lápiz] de en total de las demás del otro [señalando la figura 2 con la punta de su lápiz] son 7, porque se le suman otros dos al resultado, y entonces a estos 7 le sumo 4 y son 9.
Profe Vergel: y tú Jimmy, ¿ves algo distinto de lo que vieron o no?
Jimmy: [realiza un movimiento de negación con la cabeza].
Profe Vergel: si la figura es n (…) ¿cuántos círculos crees que tiene la figura n?
Luis: 91.
Profe Vergel: Sabiendo que la figura n es cualquier número natural.
Luis: 91 [girando su cara a un lado].
Profe Vergel: ¿91? ¿Por qué 91?
Luis: Porque al 91 le puedo restar 3 y dividirlo en 2 y da un resultado [realiza un movimiento de afirmación con su cabeza, dándose confianza el mismo]
Profe Vergel: Y ¿qué resultado te da?
Luis: 91 dividido en dos me da (…) [se toma la cabeza y se dispone en su hoja a hacer las cuentas de la operación]
Profe Vergel: Si la figura es n, si la figura es n ¿cuántos círculos tiene?
Kevin: Eh 20.000, pues…

Profe Vergel: O ¿cómo haces para hallar el número de círculos si la figura es n?, ahí es un *n* (…).
Todos los alumnos: (…).
Profe Vergel: Listo.

Transcripción sesiones 5 y 6
Viernes 4 de mayo de 2012
Sesión número 5

Vamos a realizar (…) los estudiantes están desarrollando individualmente una actividad y vamos a hacer unas entrevistas con grupo focal para conocer un poco más de cerca ciertas formas de pensar que ellos están despertando

Estudiantes 1 [SANTIAGO]
Cada uno se le ponen cuatro, se le ponen de a cuatro
Profesora: ¿Por qué sabes eso?
Estudiante 1
[El estudiante señala en su hoja de trabajo las figuras uno dos y tres de conjuntos de círculos] Porque a la uno se le colocan cuatro, a la dos se le colocan… [el estudiante piensa unos segundos]

A ochenta y uno se le quitarían cinco, y de ahí saldría la respuesta
Profesora: Otra vez ¿le quitarías cuántos?
Estudiante 1: Cinco.
Profesora: ¿A qué?
Estudiante 1: A la figura ochenta y uno, y el número que me dé si le quito cinco me saldría de número abajo.
Profesora: Bueno, pero lo que pasa es que no es la figura ochenta y uno, es que lo que te dicen hay es que es una figura con ochenta y un círculos, entonces quiero saber a que figura corresponde, a que numero de figura corresponde, ósea tú tienes ochenta y un círculos y si como me dijiste antes arriba y abajo suman ochenta y uno, entonces a que figura corresponde.
Estudiante 1: [El estudiante piensa unos segundos] A la setenta y seis
Profesora: ¿Por qué?
Estudiante 1: Porque tendría que quitarle cinco al número de los que están amontonados en círculos y si le quito esos le quito cinco hay me sale eso
Profesora: ¿y por qué le quitas cinco?
Estudiante 1: Porque…
Profesora: A ver quiero que vuelvas a mirar las figuras, vuelve a mirar las figuras [el estudiante busca las figuras en sus hojas de trabajo], listo a ver entonces, la figura uno, ¿cuántos círculos tiene?
Estudiante 1: [Señala con el lápiz la figura uno en su hoja de trabajo] La figura uno tiene cinco.
Profesora: Listo la figura dos ¿cuantos círculos tiene?
Estudiante 1: [Señala la figura dos en su hoja de trabajo con el lápiz] Siete.
Profesora: Listo ¿la figura tres cuantos círculos tiene?

Estudiante 1: [Señala la figura tres con el lápiz en su hoja de trabajo] Nueve
Profesora: Listo, entonces yo lo que te estoy preguntando es, si tengo ochenta y un círculos ¿a qué figura corresponderá? ¿Cómo hago yo para saber? Por ejemplo hagamos este acá pequeñito digamos que yo no te digo esto [la profesora tapa con su mano el texto que dice "fig. 3"] no te digo que esta es la figura tres, ¿tú cómo haces para saber qué figura es?
Estudiante 1: [El estudiante piensa unos segundos]… Le quito seis
Profesora: ¿Le quitas seis? A ver quítale seis ¿y qué pasa?
Estudiante 1: [El estudiante tapa con sus manos en la figura tres, seis círculos y le da como resultado tres círculos libres]
Profesora: Ah le quitas seis, bien y [la profesora le señala al estudiante la figura dos] ¿aquí en la figura dos?
Estudiante 1: [El estudiante intenta hacer lo mismo que en la figura tres]
Profesora: ¿Le quitas cuantos?
Estudiante 1: Cinco.
Profesora: ¿Cinco? y ¿en la figura uno?
Estudiante 1: Cuatro.
Profesora: Bien (…) y entonces al ochenta y uno ¿cuántas le quitas Santiago? según lo que me acabaste de decir, o sea me dijiste a la figura tres le quito seis, a la figura dos le quito cinco, a la figura uno le quito cuatro, entonces… entonces si tengo ochenta y un círculos cuantos… ¿cómo haces para saber? [el estudiante se queda pensando unos segundos].

Profesora. [la profesora llama a otra estudiante] Bueno siéntate, bien Sunner, entonces, pues resulta que Santiago no vino la clase anterior, entonces Santiago (…)
Estudiante 1: La anterior anterior.
Profesora: Y la anterior anterior sí viniste, entonces estamos en el punto cuatro, mira Sunner, el punto número cuatro, listo, entonces qué decía el número cuatro.
Estudiante 2 [Sunner]: Santiago tiene una figura de esta secuencia, el usó es exactamente ochenta y un círculos, ¿a qué numero de figura corresponde?, explica la manera como procediste para encontrar tu respuesta.
Profesora: Entonces mira, lo que pasa es que, quiero que le expliques a Santiago, cómo hiciste tú para encontrar a qué figura corresponde
Estudiante 2: Quitándole tres
Profesora: ¿Por qué? explícale a Santiago
Estudiante 2: Porque… yo lo hice así… quitándole tres da treinta y nueve si… bueno quitándole tres dividido en (…).
Profesora: Bueno pero entonces aquí… espérame porque mira que Santiago no nos está entendiendo nada, ¿Por qué le quitas tres?, explícale por qué tienes que quitarle tres
Estudiante 2: Por… por la secuencia que va acá [señala en su hoja de trabajo la figura dos]… entonces le quito los tres
Profesora: Explícale a Santi
Estudiante 2: Mire aquí (…) [señala en sus hojas de trabajo cada una de las figuras] entonces aquí es dos y le sumo tres da cinco si, y aquí tres más cuatro da siete y aquí tres más cinco da (…) uno más.
Profesora: Bien, pero entonces mira, o sea el problema es el siguiente quiero que le expliques esto a Santiago, o sea digamos que yo no tuviera esto acá [la profesora tapa con sus manos el texto que dice "figura 3"], que no tuviera esto acá de figura tres si, y te doy esta figura si, como haces para saber que es la figura tres.

Estudiante 2: Por la secuencia que esta acá [señala con su lápiz cada una de las figuras]
Profesora: Pero como haces… bueno sí sí está bien porque esta acá enseguida pero si no tuviéramos esto, te la doy así no más ¿cómo haces para saber?
Estudiante 2: (…) Haciendo los números, [señala las figuras con el lápiz]porque estos son números impares… entonces le voy quitando a cada uno los pares, entonces averiguo cual es la figura número tres
Profesora: Bueno, entonces mira, por ejemplo hagamos el ejercicio listo, acá ¿cuántos círculos tengo?
Estudiante 2: Hay ahí [la estudiante dice en voz baja "cuatro, tres, cinco"] Nueve
Profesora: Nueve, listo, nueve, como hago para saber que esa es la figura tres, porque me dices bueno porque va después de la figura dos, supongamos que no tengo ni la uno ni la dos, como hace… ¿cómo harías para sacar eso de que es la figura tres?
Estudiante 2: Pues quitándole los números impares
Profesora: A ver, quítale los números impares
Estudiante 2: Aquí da nueve le quito dos quedan siete, a la siete le quito dos queda cinco, [la estudiante mueve su mano rítmicamente queriendo señalar secuencia] y así así así hasta que llegue…
Profesora: Bueno y cómo sabes ¿cuántas veces tienes que quitarle?
Estudiante 2: Tres
Profesora: Pero ¿cómo sabes? Ustedes no se acuerdan, a ver si ustedes lo hicieron… ¿no? Quien le explica a Santiago, de allá Kevin ven tú me ayudas aquí, mira ven Kevin, mira estamos en este problema, resulta que… resulta que quiero que… quiero que le expliquen a Santiago como hago yo para encontrar el número de la figura si yo tengo ochenta y un círculos, o sea hay una figura con ochenta y un círculos y quiero saber el número de la figura, ¿Cómo hacen para encontrarlo?
Estudiante 3: [otro estudiante dice "dividiéndolo"] Sumando todo.
Profesora: Sumando todo, ¿cómo le sumas todo?
Estudiante 3: O sea, [señala su hoja de trabajo] teniendo así.
Profesora: Teniendo ¿Cómo?
Estudiante 3: Bueno digamos [señala con sus dedos la fila de círculos que se encuentra en la parte inferior de la figura tres] el número de abajo poniéndole… contándolo y [señala con sus dedos la fila superior de círculos de la figura tres] ponga el ochenta… el ochenta y uno acá abajo y el ochenta y…. el ochenta acá arriba, entonces ellos cuentan…
Profesora: Ah pero bueno esperen un segundito, porque es que lo que me estás diciendo, no, o sea yo no estoy hablando de la figura ochenta y uno, claro si yo fuera a construir la figura ochenta y uno, entonces coloco cuantas abajo ochenta y uno y ochenta arriba, que fue lo que coloco (…9 [la profesora pasa la hoja y les muestra a los estudiantes la respuesta de Santiago] miren eso fue lo que coloco Santiago, pero, yo lo que quiero saber es si yo tengo una figura con ochenta y un círculos ¿cómo hago para saber que numero de figura es?
Estudiante 3: Quitándole tres.
Profesora: Quitándole tres, bueno vamos a hacer otra cosa listo, me haces un favor trae las hojitas, trae las hojitas, Sunner ve trae tu hojita y me lees lo que escribiste tú no tienes la hojita. A ver, Sunner miremos qué escribiste, [la profesora señala el punto de la respuesta] acá.
Estudiante 3: El número es treinta y nueve más treinta y nueve más tres es ochenta y uno,
Profesora: Bueno ahora yo quiero ver tu hojita. Dónde está tu hojita
Estudiante 3: Sería la figura cuarenta

Profesora: Sería la figura cuarenta, bueno ya miramos, trae tu hojita Kevin trae tu hojita por favor. Que escribieron… que escribieron ahí. Tú lo hiciste igual, ha mira dice treinta y nueve más treinta y nueve más tres. Kevin, ¿tú cómo lo hiciste?
Kevin: Igual.
Profesora: ¿Igual?
Estudiante 4: No.
Profesora: No, a ver yo miro.
Estudiante 4: Acá dice diferente. Profe, ¿duro?
Profesora: Sí, léelo. Ah te lo vas a decir… bueno dilo.
Estudiante 4: Profe tú 8…9 tienes (…).
Profesora: Restarle… tendría dice hay, restarle al ochenta y uno tres y al resultado dividirlo en dos. Entonces miren, esto fue lo que ustedes escribieron, pero entonces ahora haber explíquenme por que como así que no, entonces ahorita, de dónde sacaron ese treinta y nueve, que es eso por que hicieron eso.
Estudiante 2: Por (…) a ochenta y uno le quito tres ¿sí?
Profesora: Y porque le quito tres a ochenta y uno.
Estudiante 2: Por la secuencia (…) la secuencia que va acá, [señala las figuras en su hoja de trabajo con el lápiz] como aquí va sumando, entonces [se señala a sí misma con el lápiz] yo voy quitando.
Profesora: A ver cuáles tres, enséñale a Santiago, porque es que, a ver la idea, el objetivo de nosotros es explicarle a Santiago.
Estudiante 2: [Encierra con una línea tres circulitos de la hoja de trabajo]Perdón que le raye la hoja, pero estos tres.
Profesora: Perdón que le raye la hoja. Esos tres, que pasa con esos tres .
Estudiante 2: [Señala el conjunto de tres círculos con el lápiz] Pues aquí van sumando si y yo les voy quitando.
Profesora: [Señala en conjunto de tres círculos] Aquí y ¿en las otras figuras?
Estudiante 2: Lo mismo, [señala con el lápiz la figura dos y la figura uno respectivamente] aquí va sumando y aquí también.
Profesora: Pero donde están yo no los veo.
Estudiante 2: [Señala la figura tres] este, [encierra con una línea en la figura dos tres círculos] este y [encierra con una línea en la figura uno tres círculos] este.
Profesora: Ah bueno, entonces y [la profesora señala la figura tres] acá el que encerraste acá en la hoja de Santiago, entonces a ver, bueno aquí entonces hasta el momento Sunner que nos ha dicho, pues que en todas las figuras yo puedo que (…) [la profesora señala en las hojas los conjuntos de tres círculos en cada una de las figuras] tengo tres cierto
Estudiante 2: Sumarle o quitarle.
Profesora: Puedo quitarle o sumarle dice Sunner, bueno entonces por ejemplo si yo tengo esta figura, como haces para saber que es la figura tres, esa es la pregunta, entonces tú dices voy a que… sumarle quitarle.
Estudiante 2: A sumarle o a quitarle.
Profesora: Bueno, entonces qué haces ¿le quitas o le sumas?
Estudiante 2: Le sumo.
Profesora: ¿Le sumas?
Estudiante 2: [Asiente con la cabeza].
Profesora: Y bueno, ¿cómo haces para hallar eso?

Estudiante 2: Pues sumándole aquí mire [señala la figura tres en su hoja de trabajo] seis y seis para que dé… digo tres y tres son seis y le sumo tres para que me dé número impar
Profesora: Ah para que me de estos de acá, listo, pero entonces mire, necesito saber, por que miren Santiago está haciendo caras de que no ha entendiendo, entonces otra vez, seguimos, miren este tres que ustedes me pusieron acá es por [la profesora señala los conjuntos de tres círculos en las hojas de trabajo de los estudiantes] estos tres sí o no, por esto que hicieron acá, listo pero entonces tú dices, voy a quitarle tres porque aquí… [Señala los conjuntos de tres círculos en las hojas de trabajo] bueno hay tres y luego ese treinta y nueve de donde sale
Estudiante 2: Es dividido de (…) de (…).
Profesora: De donde salió ese treinta y nueve
Estudiante 2: Treinta y nueve dividido en Setenta y nueve da treinta y nueve entonces, pusimos treinta y nueve más treinta y nueve da (…).
Profesor Rodolfo: Sunner, son ochenta y un círculos, cierto y a los ochenta y un círculos, tu le quitas tres [La estudiante asiente con la cabeza], y ¿cuánto es ochenta y uno menos tres?
Estudiante 2: (…) es (…) a setenta y ocho.
Profesor Rodolfo: Setenta y ocho, bueno y luego ¿qué haces con el setenta y ocho?
Estudiante 5 [Lorena]: Lo divides.
Profesor Rodolfo: ¿Qué hace?
Estudiante 5: Lo divides.
Profesor Rodolfo: Lo divides entre cuánto.
Estudiante 5: En treinta y nueve y treinta y nueve.
Profesor Rodolfo: Ósea lo divide, dice, dice…
Profesora: Lorena
Profesor Rodolfo: Lorena que el setenta y ocho se divide en treinta y nueve y treinta y nueve. Y eso es dividir entre cuánto (…) ¿Entre cuánto Sunner?
Estudiante 2: Dos.
Profesor Rodolfo: Entre dos, entonces cuanto es setenta y nueve… setenta y ocho dividido entre dos.
Estudiante 2: Treinta y nueve.
Profesor Rodolfo: Será el treinta y nueve que aparece acá [la estudiante asiente con la cabeza] Entonces ahora si como le explicas a Santiago todo ese procedimiento, a ver si Santiago entendió.
Estudiante 2: Mira a ochenta y uno le quito tres, ¿Cuánto da?
Estudiante 1: Setenta y ocho.
Estudiante 2: Y ahora setenta y ocho lo divides por dos.
Estudiante 1: [Piensa unos segundos].
Profesora: Haz la división ahí, con el lápiz haz la división.
Estudiante 1: [Piensa unos segundos].
Profesora: No, haz la división, setenta y ocho.
Profesor Rodolfo: Tranquilo, no hay problema, no hay afán.
Estudiante 1: [Piensa unos segundos]
Profesora: Bueno pero Sunner, yo sí quiero saber una cosa y por qué se divide en dos y no en tres.
Estudiante 1: (…) da treinta y cinco. Siete no tiene número par, usted le quita los diez pone seis… hay quedan seis y seis le da tres y los diez que le quedan, cinco cinco.
Estudiante 2: Setenta y ocho dividido en tres.

Profesora: ¿En tres? Seguro.
Estudiante 2: Digo dividido en dos, da treinta y nueve.
Profesora: A ver explícale a Santiago, porque Santiago no está seguro de que de… Santiago dice que da treinta y cinco, haz la división.
Estudiante 1: Tres… al cinco se le suma…
Profesora: Haz la división.
Estudiante 2: ¿La división?
Profesora: Si se te olvidó. ¿Quién le ayuda a Santiago con la división?, ¿tú Yaneth? No tampoco. Sí, sí porque tú escribiste acá que lo divides.
Profesor Rodolfo: Bueno pero ustedes saben dividir, no hay ningún problema, esa no es la… ese no es el lío, Santiago lo que Sunner te está diciendo es, qué si la secuencia… que si está trabajando la secuencia cierto, y tiene ochenta y un círculos, entonces Sunner dice a ochenta y un círculos le quito tres y da setenta y ocho…
Profesora: Que son estos de acá
Profesor Rodolfo: Y los setenta y ocho lo divido entre dos y da treinta y nueve, y entonces lo que luego hace ella es treinta y nueve más treinta y nueve más tres y da ochenta y uno, y entonces afirma que la figura es la figura numero qué, Treinta y (…).
Estudiante 2: Treinta y nueve.
Profesor Rodolfo: Treinta y nueve, y si yo… y si yo… y si yo preguntara Santiago, si tenemos quinientos veintiún círculos, que numero de figura es, será que ese procedimiento de Sunner sirve, la posición quinientos veintiún círculos, ¿Cómo harías tu Sunner si son quinientos veintiún círculos?
Estudiante 2: No sé, yo se la de ochenta y uno por que ya se cómo es, es quitándole si [la estudiante mueve el lápiz como en forma de secuencia de arriba a abajo] como ochenta y uno a dieciocho, entonces le quito dieciocho si, queda treinta
Estudiante 1: ¿Es una pregunta respondible o clásica?
Profesora: Ja ja ja.
Profesor Rodolfo: ¿Cómo?
Profesora: Es una pregunta respondible o clásica, dice Santiago. Si se puede responder
Profesor Rodolfo: Y a… y a (…) y con quinientos veintiún círculos no se puede aplicar el mismo procedimiento que tu aplicas.
Estudiante 2: Sí.
Profesor Rodolfo: Bueno entonces cual es el procedimiento, ¿quitarle cuanto primero?
Estudiante 2: Tres.
Profesor Rodolfo: Bueno, que a quinientos veintiuno le quitas tres cuánto te queda.
Estudiante 2: Quinientos diecinueve.
Profesor Rodolfo: (…) Quinientos dieciocho no [la estudiante asiente con la cabeza]. Y luego que haces con los quinientos dieciocho.
Estudiante 2: Lo divido.
Profesor Rodolfo: ¿Entre cuánto?
Estudiante 2: Dos.
Profesor Rodolfo: Entre dos, Cuanto da quinientos dieciocho entre dos. Si quieres has la división, por ahí (…) detrás de la hoja.
Estudiante 2: Se me olvidó.
Profesor Rodolfo: Se te olvido dividir, ¿sí?
Estudiante 2: Es que hace harto que no divido.
Profesora: ¿Quién le ayuda a Sunner con esa división? Sí Kevin ¿tú?

Profesor Rodolfo: Quinientos dieciocho entre dos.
Profesora: Dividido dos. [La profesora se dirige a Santiago] O sea, tú ya entendiste lo de los ochenta y uno, pero mira hay que explicarle a él por qué estamos restándole tres y porque estamos dividiendo en dos, entonces mira, miren esta figura, Adrianita, ven miremos acá, Lorena miremos acá, miren, pregunta ¿cuántos círculos hay en la figura número tres?
Los estudiantes contestan en coro: Nueve.
Profesora: Nueve listo, si nosotros aplicamos el procedimiento que hizo Sunner, para saber qué número de figura es, entonces bueno miren [la profesora toma una hoja y tapa los textos que dicen "fig. 1, fig. 2, fig. 3"] vamos a tapar aquí el número de la figura listo entonces miren, vamos aplicar el procedimiento que hizo Sunner, entonces Sunner dice: a nueve le resto tres, [la profesora señala en la hoja de trabajo uno de los conjuntos de tres círculos en una de las figuras] cuales tres, estos tres cierto, a nueve le resto tres ¿cuántos círculos me quedan?
Los estudiantes contestan en coro: Seis.
Profesora: Seis, y si yo lo divido en dos, el seis (…) ¿qué número es?
Los estudiantes contestan en coro: Tres.
Profesora: Tres, [descubre la hoja y deja ver los nombres de las figuras] entonces aquí tres, [Vuelve a tapar los nombres de las figuras] ahora veamos esta de acá, ¿cuántos círculos hay aquí en esta figura?
Los estudiantes contestan en coro: Siete.
Profesora: Siete, aplicando el procedimiento de Sunner, resto tres entonces ¿cuántas me quedan?
Los estudiantes contestan en coro: Cuatro.
Profesora: Cuatro, entonces vamos a hacer una cosa, [encierra con una línea en la figura dos tres círculos] vamos a encerrar aquí, vamos a rallar con el permiso de Santiago su hojita, que esto fue lo que rallo Sunner, listo cuantas me quedan cuatro, y si lo divido en dos.
Estudiante 2: Dos.
Profesora: [Descubre el nombre de las figuras] Miren dos, aquí, ¿cuántos círculos hay?
Los estudiantes contestan en coro: Cinco.
Profesora: Cinco, y le resto cuantos, ¿voy a restarle cuantos?
Los estudiantes contestan en coro: Tres.
Profesora: Tres, y me quedan ¿Cuántos?
Los estudiantes contestan en coro: Dos.
Profesora: ¿Y si lo divido en dos?
Los estudiantes contestan en coro: Queda uno.
Profesora: Viste Santiago eso, por eso es que Sunner está haciendo eso, entonces que pasa ella coge los ochenta y un círculos le resta tres lo divide en dos y le da el número de la figura, bien, si, listo, muy bien. Entonces ahora nosotros estábamos en la pregunta número cinco y todos ya las contestaron cierto.
Estudiante 5: No profe.
Profesora: Tú no, bueno no la has podido entender, vamos a ver si la contestamos entre todos, miren lo que dice, la número cinco dice, Existe una figura que tenga doscientos círculos, ustedes creen que eso es posible, yo puedo construir (…) no porque no Kevin.
Estudiante 2: Sí porque las figuras son números impares.
Profesora: Miren lo que dice Sunner, doscie, ¿no puedo construir una figura que tenga doscientos círculos? Porque el que… Los números de círculos que aparecen son ¿qué?

Estudiante 2: Impares.
Profesora: El doscientos es un número ¿qué?
Estudiante 2: Par.
Profesora: Par, ¿tú por qué dices que si Kevin? , ¿Quién dijo que si? Santiago. ¿Por qué crees que si se puede construir una figura con doscientos círculos?
Estudiante 1: Porque se ponen doscientos abajo y ciento noventa y nueve arriba
Profesora: Pero es que no, porque la idea es que entre las fi, entre la fila de arriba y la fila de abajo me sumen doscientos, tienen que sumar doscientos ¿si se puede? Que los de arriba y los de abajo.
Estudiante 1: Sí.
Profesora: ¿Sí?, ¿por qué?
Estudiante 1: Se le ponen noventa y nueve arriba y el resto abajo.
Profesora: Y, ¿cuánto es el resto?
Estudiante 1: El resto serían (…) [se queda pensando durante 4 segundos] 102
Profesora: ¿Ciento dos? Seguro, mira lo que está diciendo Santiago, Santiago dice que si se puede construir si yo coloco abajo, ¿Cuántos?
Estudiante 1: Cientos dos.
Profesora: Abajo, ¿Cuántos colocas?
Estudiante 1: [Con risa] ¡ciento dos!
Profesora: ¿Abajo coloco ciento dos?, ¿seguro? Y ¿arriba?, porque tienen que sumar doscientos.
Estudiante 1: [se queda pensativo].
Estudiante 2: No se puede.
Profesora: ¿No se puede?, a ver Sunner explícale porque no se puede.
Estudiante 2: Porque aquí son números impares entonces aquí es cinco. [Señala la primera figura].
Profesora: ¿Dónde?, muéstrale en dónde.
Estudiante 2: Este son cinco.
Profesora: Mira Santi, mira.
Estudiante 2: Estos son cinco ¿sí? [señala la figura uno con el lápiz] aquí son siete [señala la figura dos con el lápiz] y aquí son nueve [señala la figura tres con el lápiz] ¿sí? Entonces así va siendo sucesivamente.
Profesora: O sea que el siguiente ¿Quién sería?, La figura número cuatro ¿Cuántos círculos tiene?
Estudiante 2: Once.
Profesora: Once y ¿la siguiente?
Estudiante 4: Trece.
Profesora: Y la siguiente y la siguiente, entonces tu Sunner decía así sucesivamente y entonces que pasa me están dando números ¿qué?
Estudiantes en coro: Impares
Profesora: Impares, ¿sí? Y como el doscientos no es un número impar entonces dice Sunner Pues eso no podría ser, pero ustedes ¿qué creen?, ¿si están de acuerdo?
Estudiante 1: Se le quitan cuatro.
Profesora: Ja ja ja.
Profesor Rodolfo: Santiago, Santiago ahora Santiago, Santiago y todos que todos ya vamos a terminar E… ahora cambiemos la pregunta e… ¿Cuántos círculos tiene la figura veinte Santiago?

Estudiante 1: ¿La figura veinte?
Profesor Rodolfo: ¿Cuántos círculos tiene? [el estudiante se detiene a pensar] ¿Tienes presente la secuencia cierto?, ¿cuántos círculos tiene la figura veinte? Para ti.
Estudiante 1: [El niño se acerca a mirar las figuras iniciales, piensa durante doce segundos] Cuarenta y tres.
Profesor Rodolfo: Cuarenta y tres, ¿Cómo lo hiciste Santiago?
Estudiante 1: Acá [señalando las figuras] se le ponen aquí hay tres acá arriba
Profesor Rodolfo: Sí.
Estudiante 1: Y se le ponen se le tienen que sumar uno y ahí me daría veinte uno y la figura seria y es la tres, entonces ahí me daría veintiuno, si es la figura veintiuno y le y l y abajo tengo que ponerle otros, le tengo que poner otro número para que quedara bien.
Profesora: Y ¿cómo es que quede bien? ¿Para qué sume cuánto?
Estudiante 1: Para que sumen.
Profesora: Tú dijiste cuarenta y tres.
Estudiante 1: Sí.
Profesor Rodolfo: Por ejemplo, y si yo te pregunto (…) ¿Cuántos círculos tiene la figura… ochocientos?
Estudiante 1: [Sonríe y piensa durante 4 segundos].
Profesor Rodolfo: Parece que tú tienes el método, que ¿Cuántos círculos tienes la figura ochocientos?
Estudiante 1: [Se queda pensando durante 5 segundos].
Profesor Rodolfo: Nos puedes contar ¿qué es lo que estás pensando?
Estudiante 1: No sé, je je je.
Profesora: A ver.
Profesor Rodolfo: Porque tu respondiste bien para la figura… veinte, ¿sí?, para la figura veinte, entonces ese mismo método ¿lo puedes usar para la figura ochocientos?
Estudiante 1: Sí.
Profesor Rodolfo: Entonces explícanos como cálculos, como haces para hallar el número de círculos de la figura ochocientos.
Estudiante 1: [Se detiene a pensar durante 17 segundos aproximadamente debido a que cortaron el video]
Profesor Rodolfo. ¿Puedes repetir? Dieciséis ¿qué?
Estudiante 1: Millones más tres.
Profesor Rodolfo: ¿Y de dónde salieron los dieciséis millones?
Estudiante 1: Ochocientos.
Profesor Rodolfo: ¿Por cuánto multiplicaste ochocientos?
Estudiante 1: Por otros ochocientos.
Profesor Rodolfo: ¿Estás multiplicando?
Estudiante 1: Sumando.
Profesor Rodolfo: Ah! Estás sumando ochocientos con ochocientos.
Estudiante 1: Sí, y con más, más los tres que se le tiene que sumar.
Profesor Rodolfo: Ah!... Ochocientos más ochocientos eso es otra cosa, ochocientos más ochocientos ¿cuánto es? Bueno Mil seiscientos más tres pues mil seiscientos tres, ¿sí? Y si yo te pregunto ¿la figura mil?
Estudiante 1: ¿La mil?
Profesor Rodolfo: Sí, ¿cuantos círculos tiene la figura mil?
Estudiante 1: Habría que estar en bachillerato, je je je.

Profesora: Ja ja ja.
Profesor Rodolfo: Ja ja ja. ¿Cuántos círculos tiene la figura mil? Con el mismo método que… que estás usando.
Profesora: Que Sunner sabe.
Estudiante 2: Da doscientos digo…
Estudiante 4: Mil seiscientos tres.
Estudiante 2: No.
Estudiante 1: Doscientos tres.
Profesora: ¿Mil seiscientos tres?
Estudiante 2: No da siete mil.
Estudiante 1: Doscientos tres.
Profesor Rodolfo: No, para la figura mil Sunner.
Estudiante 2: Da dos mil tres.
Estudiante 1: Dos mil tres.
Profesor Rodolfo: Ah! Dos mil tres.
Profesora: ¿Por qué?
Estudiante 1: Por el mismo método.
Profesor Rodolfo: ¿Por el mismo método?, y ¿cuál es el método que… cuál es el método que estás diciendo?
Estudiante 1: Sumar Mil y mil y se le suman otros tres y ya.
Profesor Rodolfo: Bueno Santiago, eh… Sunner Sunner Sunner Sunner Sunner Sunner y… la figura… doscientos mil.
Estudiante 1: Uy!
Estudiante 2: Es.
Profesor Rodolfo: ¿Cuántos círculos tiene la figura doscientos mil?
Estudiante 2: Cuatrocientos tres.
Estudiante 4: Cuatrocientos.
Profesora: ¿Cuatrocientos?
Estudiante 4: Sí.
Profesora: ¿Solo cuatrocientos? Porque mira que es la figura doscientos mil.
Estudiante 2 y 4: Ah! Sí.
Estudiante 1: Cuatrocientos mil tres.
Profesor Rodolfo: Eh! cuatrocientos mil tres, ¿Cómo lo hiciste?... Santiago ¿cómo lo hiciste?
Estudiante 1: Eh… ya he dicho eso como diez veces.
Profesor Rodolfo: Vuélvelo a decir no importa.
Estudiante 1: Se le suman dos veces la misma pregunta se le suman tres y ya.

Sesión 6
8 de Mayo de 2012

Comenzamos la sesión número seis. En estos momentos están terminando de contestar las últimas preguntas del instrumento número dos y comenzamos a trabajar él instrumento número tres.

Profesora. Esta secuencia hice los cuadrados para poder escribirles esto [escribe dentro tres cuadrados dibujados en el tablero unos números) Listo. A partir de hoy no vamos a empezar a trabajar con las secuencias figurales, es decir ya no vamos a tener figuras ni círculos sino que vamos a empezar a trabajar con una secuencia numérica que significa eso. Que ahora ya no vamos a hablar de figura uno figura dos figura tres sino del término uno termino dos termino tres entonces miren el término uno es ¿quién?
Estudiantes.
Dos.
Profesora. Dos. ¿El término dos quién es?
Estudiantes en coro. Cinco.
Profesora: ¿El término tres quién es?
Estudiantes en coro. Ocho.
Profesora: Entonces con esa nueva secuencia vamos a tratar de hacer ejercicios como lo hicimos en las anteriores, voy a repartir el material lo van…
[La escena cambia a donde encuentran unas estudiantes discutiendo y ponen los dedos sobre la guía que les dieron señalando la secuencia inicial que dio la docente].

Profesora A ver yo quiero saber, a ver yo quiero saber que tanto hablan, a ver cuéntame.

Estudiante 1 (Yaneth). Es que estamos averiguando como es que se… como… como se saca esta secuencia.
Profesora: A ver ¿cómo?
Estudiante 1 (Yaneth): Entonces yo entiendo así que este… este [señala con el lápiz el término uno que corresponde al número dos] le ponen uno y si sumamos estos, estos… el uno y el dos quedan tres y lo ponemos acá este dos lo pasamos acá y le ponemos tres queda cinco.
Profesora: ¡Cinco! Ah! Bien y ¿entonces? como sigo Como hago el término más.
Estudiante 1 (Yaneth): Bueno, entonces el, el cinco se pasa para el ocho [toma el lápiz y señala el término dos y luego el término tres] entonces a tres le pongo cinco y me quedan… [las estudiantes de esa mesa dicen "¡ocho!"]
Profesora: Y entonces ¿cómo sería el término cuatro?
Estudiante 1 (Yaneth): Lo mismo así sería… el seria… Poner el ocho [señala el término tres] en el [las estudiantes de la mesa dicen "cuatro"] cuatro, y sumamos el cuatro con el ocho.
Profesora: Y ¿Cuánto me da?
Estudiante 1 (Yaneth): Doce.
Profesora: ¿Doce? ¿sí?, bueno, entonces a ver quiero que hagan esto, escriban acá termino cuatro y lo volvemos a mirar.
[La estudiante 1 (Yaneth) procede a escribir]
[La cámara se enfoca en una respuesta a la primera pregunta que dice: "¿Cuáles son los números correspondientes a los términos 4, 5 y 6 Explica" La respuesta de este alumno es: " 11- Término 4; 14 Término 5; 17- Término 6 porque uno aumenta 3"]

Estudiante 2 (Sunner). Aquí es como… sumándole tres.
Profesora: ¿Por qué?
Estudiante 2 (Sunner): Porque mire dos [señala el término 1] más tres son cinco [señala el término 2] ¿sí? Cinco aquí da cinco ¿sí? Cinco más tres son ocho sumándole tres.

Profesora: Y entonces el cuarto término, ¿cuál sería?
Estudiante 2 (Sunner): Once.
Profesora: El once, bueno entonces escribe acá, termino número [señala el lugar donde quiere que la estudiante coloque su respuesta] termino cuatro y escribe el once. Yaneth a Yaneth le había dado que número, el ¿qué?
Estudiante 1 (Yaneth): Je je je (…) el doce.
Profesora: El doce, escribe el doce acá un segundito y ya miramos, ahora cual es la manera, cual es la manera en que tu viste, así término cuatro y le suma el once, ¿Cuál es la manera en que tu viste?
Estudiante 3: [Se queda mirando la hoja y señala los términos pero no decide su método].

Profesora: Je je ¿no?... ¿no tampoco? Bueno entonces acá tenemos un lio porque entonces al fin el número cuatro quien es ¿el doce o el once? Um? A ver je je je a ver
Estudiante 2 (Sunner): Sí porque mire Yaneth Aquí la secuencia es como sumándole tres ¿sí? Porque mire dos [hace las cuentas mostrándole sus dedos a la docente] cua, dos tres cuatro cinco tres ¿sí? Y a los cinco le sumo tres da ocho y a la siguiente
Profesora: Ajá y a ocho.
Estudiante 2 (Sunner): A ocho le sumo tres once.
Profesora.: Listo. Entonces mire lo que está haciendo Sunner, es decir Sunner tiene una secuencia ¿listo? [señala la secuencia de la hoja de Sunner] y la secuencia para ella se construye sumando tres y todos funcionan, ¿listo? Vamos a mirar que pasa con la construcción de Yaneth porque es que a ver Yaneth dice por ejemplo ¿de donde salió este doce? Entonces tú dices que tomas este ocho lo pasa acá y le sumas cuatro [señala la respuesta de Yaneth] ¿cierto? De donde salió el ocho entonces Yaneth dice pues yo cojo el cinco [señala el término 2] lo pongo acá [señala el término 3] le sumo el tres de donde salió el cinco. Entonces fíjense, fíjense lo que está haciendo Yaneth si la construcción de Yaneth estuviera o sea fuera cierta entonces miren lo que hago, como construyo el cinco cojo el dos [señala en manera de circulo con el lápiz el número dos] lo pongo acá [coloca el lápiz en el lugar del cinco] y le sumo dos Pero dos más dos ¿cuánto me da?
Estudiantes en coro: Da cuatro.
Estudiante 1 (Yaneth): Mas encima este uno.
Profesora. Je je je bueno pero entonces miren esto fíjense que para construir este y este funcionaba [señala el cinco y el ocho] o sea para construir el doce funcionó pasarle el ocho y sumarle cuatro para construir el ocho funcionó pasar el cinco y sumarle tres pero fíjense que para construir el cinco ya Yaneth necesita sumarle otra cosa entonces eso rompe la secuencia, ¿ves? Porque no estás haciendo lo mismo todas las veces en cambio Sunner, que hace todas las veces suma tres, tres, tres, tres ¿listo? Esa es una característica de la secuencia ¿si se acuerdan de los circulitos? Que por ejemplo la pasada era que el número de círculos aquí arriba había uno menos, un circulo menos y en todas [hace un movimiento con la mano simulando que los círculos se apilan, ¿listo Yaneth? O sea estuvo muy bien tu observación muy chévere esa observación y yo no la había visto ¿listo? Pero hay que tener cuidado en que siempre tengo que hacer lo mismo para cualquiera ¿listo? Entonces concluimos que es el termino 11 es ¿cuál? Once, entonces ahora van a mirar el término número cinco y el término número seis.

[El video es cortado y se pasa a la situación de otro grupo de estudiantes].

Profesora: A ver Felipe cuéntame, ¡Uy! A ver vamos a mirar esto un minutico a ver, permítanme las hojas Bueno entonces Esneider, Kevin y … sí

Estudiante 4 (Santiago): No, no, no… [Santiago se niega a entregar la hoja por dos segundos, hasta que accede a entregársela a la profesora]

Profesora: Sí, sí. Je je je. Entonces miren, término número cuatro [señala el término 4 del taller de Santiago] todos tienen once, once, once [señala los otros dos talleres], termino número cinco [señala el término número 5 del taller de Santiago] catorce, catorce, catorce termino número seis diecisiete diecisiete y diecisiete.

Estudiante (no se reconoce cuál de los tres estudiantes es el que dice): Todos copiaron así.

Profesora: Bueno quien me explica porque, porque a todos les dio lo mismo. A ver Kevin ¿por qué?

Estudiante 5 (Kevin): Porque (…) en los términos le suma, le suma tres.

Profesora: A los términos…

Estudiante 5 (Kevin): Le va sumando tres.

Profesora: A ver explícame, explícame como se suma.

Estudiante 4 (Santiago): Dos.

Profesora: Dos.

Estudiante 4 (Santiago): Se le ponen tres, va cinco.

Profesora. Sí.

Estudiante 4 (Santiago): Se le pone otros tres da ocho.

Profesora. O sea que el cuarto término… se le ponen tres y ¿Cuánto me da?

Estudiantes: Once

Profesora: Y al quinto [señala con su dedo índice el quinto término en el taller de Santiago].

Estudiantes: Catorce.

Profesora: ¿Y a este? [señala con su dedo índice el término 6 del taller de Santiago]

Estudiantes: Diecisiete.

Profesora. ¿Quién lo vio diferente?… ¿Todos lo vieron igual?, ¿sumando tres?

Estudiante 4 (Santiago): Sumando de a tres.

Profesora: ¿Sí? A no muy bien que chicos tan pilos.

Estudiante 4 (Santiago): ¿Ya hicieron la segunda?

Profesora: Entonces ahora vamos a hacer la segunda. ¿Tú ya hiciste la segunda? [le pregunta a Santiago, el cual dice que sí]Bueno entonces… no, espera que ellos dos hagan la segunda listo y ahora si volteen la hoja… [el video es cortado] Este es con el que respondiste este, ¿sí? A bueno pero entonces esperemos a que ellos dos terminen y ya, y ya.

Profesor Rodolfo: Explícame, Santiago explícame como hiciste este. Explícame para mi, es que yo no entiendo.

Estudiante 4 (Santiago): Es que… mira, se le suman de a tres y el termino quince [señala su respuesta del término quince] tiene que ponérsele nueve mas… ¿nueve? se le po… se le ponen nueve para el término quince… y le sumé a nueve, nueve y nueve hasta que, hasta que de tres hasta que me diera tre… nueve tres, y le puse igual lo sumé y ahí me dio veintisiete.

Profesor Rodolfo: Ahora muéstrame lo que hiciste en la parte de atrás.

[El estudiante da la vuelta a la hoja y se visualiza lo siguiente: 3+3+3+3+3+3+3+3+3=27] ¿Cuantos tres hay ahí?

Estudiante 4 (Santiago): Nueve.
Profesora: Ah!, es decir que tú, son nueve términos después de cuál de ¿este? [señala el término 6]
Estudiante 4 (Santiago): Ajá.
Profesora: Umm.
Estudiante 4 (Santiago): No nueve termitos, nueve términos pero del uno para allá [moviendo su mano con el dedo índice estirado de izquierda a derecha].
Profesora: Ajá o sea exacto o sea aquí listo seis y luego le sumo o sea este es el término seis [señala en la hoja con el dedo el término seis] y lo que tú dices es que sigues sumando [voltea la hoja, y señala la suma que Santiago hizo allí] el termino siete ocho nueve o sea hasta que.
Estudiante 4 (Santiago): O también, o también me guie solo por este [señala el termino cinco] por el término cinco se le tienen que poner sie, se le ponen… diez, diez veces más el tres pero como ya está la seis, se le tienen que poner nueve veces.
Profesora: Ah! Je je je. Muy bien Santiago Listo, entonces…
[El video es cortado y pasan a estudiar el caso de otros estudiantes].
Profesora: Laura dice término número cuatro once, termino número cinco catorce, catorce [señala en cada taller de los niños el término 5], término número seis diecisiete. Uy a todos nos dio ¿Por qué a todos le dios lo mismo? ¿Quién me explica?, ¿cómo lo hiciste?
Estudiante 7 (Luis): Yo
Profesora. A ver… ¿tú Luis?, a ver explícame
Estudiante 7 (Luis). Por ejemplo, como esta es la figura cuatro, ¿no? [señala el término 4 con el esfero]
Profesora. Sí.
Estudiante 7 (Luis): Este cuatro lo multiplico por dos. [aquí dos estudiantes, se dicen algunas palabras, algo que no dura más de cuatro segundos].
Profesora. Y bueno y ¿qué pasa?, lo multiplicas por dos y ¿qué?
Estudiante 7 (Luis): Y (…) el resultado que me dio le quito uno… y le sumo cua… cuatro más y ese es el resultado.
Profesora: Y ¿ese es el resultado?
Estudiante 7 (Luis): Es once.
Profesora: Y ¿cómo obtuviste este catorce? [señala con su mano la respuesta del término cinco proporcionada por el estudiante].
Estudiante 7 (Luis): Igual.
Profesora: ¿Igual? A ver como Explícame, explícame como.
Estudiante 7 (Luis): Bueno esta es la del cuatro [señalando con su índice una suma que realizó al reverso de la hoja]
Profesora: Miren entonces explícame otra vez, o sea esta es la figura cuatro [señala con su esfero los números que va indicando] la multiplicas por dos y te da ocho a ocho le resto una me da siete y le sumo cuatro y me da once. Y si yo hago el mismo proceso seguro que me da este catorce [dando vuelta a la hoja señala la respuesta del chico].
Estudiante 7 (Luis): Sí.
Profesora: A ver hagámoslo, hagámoslo. Entonces, sería la figura cinco, ¿cierto? Cinco por dos.
Estudiante 7 (Luis): Igual a diez ¿no?
Profesora: Listo, ¿le resto cuánto?
Estudiante 7 (Luis): Le resto una.

Profesora: Una.
Estudiante 7 (Luis): Ay no, le resto
Profesora: Ajá, y me da ¿cuánto?
Estudiante 7 (Luis): Igual.
Profesora: Sí y ahora le sumas (…)
Estudiante 7 (Luis): A ese nueve le sumo… Ay [se equivoca escribiendo los símbolos de las operaciones].
Profesora: Le sumas cuánto.
Estudiante 7 (Luis): (…) [se tarda un poco en responder, ya que está escribiendo primero la operación] Le sumo cinco igual a catorce.
Profesora: Y ¿por qué cinco?
Estudiante 7 (Luis): Porque es la figura cinco, ahí es catorce.
Profesora: Ah bueno entonces [quita de las manos del estudiante el esfero con que él estaba escribiendo las operaciones] otra vez quiere decir que esto es, esta es la figura [señala el primer número de la operación y sigue señalando sucesivamente] por dos le resto uno luego le sumo otra vez el número de la figura y me da once quiero verlo ahora con el diecisiete… Hazlo otra vez ahora con el diecisiete. Acá lo hiciste con la figura seis otra vez, miren chicos lo que está haciendo Luis, entonces, el coge la figura la multiplica por dos al resultado le resta uno luego le sumo otra vez la figura y te da otra vez te da diecisiete así fue que él sacó estos términos [señala el término 5 y 6], ¿alguien lo sacó de manera diferente?
Estudiante 8 (Héctor): Sí, yo
Profesora: ¿Cómo?, ¿cómo?, ¿cómo?
Estudiante 8 (Héctor): Pues yo lo hice así profe porque este es el término cuatro entonces [señala el término cuatro en su respuesta) tenemos que multiplicarlo por dos y el resultado le… le sumo tres que me da once [cada número que nombra lo señala con el lápiz; ya sea término, o algún número de la operación que nombra, ya que tiene las operaciones escritas en la hoja] y la del cinco pues… tenemos que irle sumando de a uno, por ejemplo cinco por dos diez.
Profesora: Sí.
Estudiante 8 (Héctor): Y le colocamos cuatro, como acá colocamos tres entonces le vamos a sumar otro que me daría cuatro que me da catorce.
Profesora: (…) [señala con su mano el siguiente término] y acá ¿Cómo hiciste este? Cuatro por dos.
Estudiante 8 (Héctor): Eh… No seis por dos doce.
Profesora. Ah ya ya ya. Si doce
Estudiante 8 (Héctor): Y le sumamos cuatro e… me da
Estudiante: [no se reconoce quién es el que lo dice]. No le suman cinco porque.
Estudiante 8 (Héctor): Ah sí porque.
Estudiante: A este seis que es el número de la figura le resto una que el la estaba haciendo así [aquí charlan el estudiante que no se reconoce con Héctor, pero no se entiende muy bien]
Estudiante 8 (Héctor). Ah sí sí sí sí. Seis por dos doce y le sumamos cinco porque…
Profesora. Espera acá porque le sumaste cinco, acá ¿cuánto le sumaste?, cuatro, acá ¿cuánto le sumaste?
Estudiante 8 (Héctor): Tres.

Profesora: Tres mmm Listo bien. ¿Alguien lo hizo diferente? Es que ustedes hasta ahora acabaron de llegar ¿cierto?, entonces bueno quiero que miren la figura [le muestra la secuencia a dos estudiantes]… cuál sería, mirándolo, así, ¿cuál sería? [los estudiantes piensan la respuesta] el término 4 sería ¿cuál?
Estudiante 9 (Jimmy): Once
Profesora: ¿Once? Por qué, por qué el once
Estudiante 9 (Jimmy): Porque el término 1 es dos [señala el término 1 con sus índices]…
Profesora: Sí.
Estudiante 9 (Jimmy): Le suma tres, le da cinco [señala el término 2 con sus índices], y el término dos es cinco y… así.
Profesora: Ah… o sea, es más sencillo que lo que están haciendo ellos y da lo mismo… ¿y si da lo mismo?
Estudiante 8 (Héctor): No profe es más difícil porque de acá…
Profesora: ¿Es más difícil?
Estudiante 8 (Héctor): Cuál es el número de la escritura… quince.
Profesora: Ah ya je je je o sea, e… bueno, entonces vamos a mirar a ver que, bueno entonces… esperen, esperen, [hace un movimiento en las manos queriendo decir "basta, no más"] esperen un segundito que esto está chévere, entonces aquí… eh… esta es la hoja de Jenny, ven pero entonces acá [retira la hoja de Jenny, y toma de debajo la hoja de Jimmy … Jimmy, entonces Jimmy tu me dices, listo, dos [señala el término 1], cinco [señala el término 2], ocho [señala el término 3], el término 4 va a ser once porque le estás sumando tres, el término cinco, ¿cuál va a ser?
Estudiante 9 (Jimmy): Umm… el catorce
Profesora: ¿Y el término… 6?
Estudiante 9 (Jimmy): El diecisiete
Profesora: ¡Listo! Entonces ahora lo vas a escribir acá [señala el espacio que hay en la hoja entre la pregunta 1 y 2], tú también, y hacen el segundo y el tercero ¿listo? Segundo y tercero. [la escena cambia a un grupo distinto de estudiantes]
Profesora: A ver, muéstrame ahí como es que va aumentando tres, como, a ver
Estudiante 10 (Jennifer): O sea mire, en el término 1, da e… es el número dos [señala el término 1 con el índice izquierdo].
Profesora: Sí:
Estudiante 10 (Jennifer): Pa' llegar al término dos [señala el término dos con su índice izquierdo]… pa' llegar al número cinco, le suma tres [indica el número tres con sus dedos], y del cinco pa' llegar al ocho [señala el término tres] le suma tres
Profesora: Ah muy bien, o sea, que el término 4, a ocho le sumo cuánto
Estudiante 10 (Jennifer): Tres
Profesora: Y me da, once, listo. ¿quién lo hizo diferente?... ¿todas lo hicieron igual?... ¿tú lo hiciste igual? [el estudiante afirma con la cabeza]... ¿si, listo, si, igualito?... o sea, ¿sumando? [todos los estudiantes de la mesa asienten con la cabeza]... bien, entonces ahora vamos a hacer el número dos, y el número tres, ¿listo? dos y tres.
[La escena cambia, y ahora la cámara está grabando a Yaneth, Sunner y a la estudiante 3]
Profesora: ¿Sumando tres? Y como, como, como hago [las estudiantes piensan unos dos segundos]
Estudiante 2 (Sunner): Umm… pues el término seis [señala un número en su taller], es el 17, al 17 le voy sumando tres, da 20, más tres… 23…

Profesora: ¿Y cuántas veces tengo que sumarlo? [las estudiantes responden con sonidos fáticos como “eh”] (…) ¿Cómo haces para saber que es el 15?
Estudiante 3: [Menciona algunas otras palabras, pero el audio no es claro]: Nueve veces
Profesora: ¿Nueves veces?, bueno, háganlo, quiero ver que lo hagan, a ver cuánto les da. [las estudiantes platican entre ellas] Listo, hazlo, escríbelo
[Duran dos segundos pensando las estudiantes, y allí la escena cambia y en este momento enfoca a Sneider, Kevin]
Estudiante 6 (Esneider): Se le ponen… espere [cuenta con los dedos]… otros catorce números más.
Estudiante [no se reconoce quién interviene]: ¿Catorce?, ¿Por qué?
Estudiante 6 (Esneider): Sí, son catorce.
Profesor Rodolfo: Usted está respondiendo “¿cuál es el número que corresponde al término 15?”
Estudiante 6 (Esneider): Sí.
Profesor Rodolfo: ¿Cómo lo hiciste?
Estudiante 6 (Esneider): Eh… guiándome por la figura cinco.
Estudiante 5(Kevin): Por la figura (…) seis [Kevin señala el término seis] (…) porque guiándome de la figura seis (…).
Profesor Rodolfo: Un poquito más fuerte Kevin ¿cómo lo haces?
Estudiante 5(Kevin): Comienzo desde la figura seis (…).
Profesor Rodolfo: ¿Comenzaste desde que figura?
Estudiante 5(Kevin): La figura seis, porque ya la teníamos ahí, entonces va sumándole tres hasta llegar al número 15... y si usted… lo [pone su mano en su taller, y lo mira por un instante muy corto]… suma todo, le da 44.
Profesora: ¿Y cómo lo sumaste?, ¿Dónde está la suma?... ¿Dónde? [comienza a realizar un movimiento con las manos, simulando que está contando]... ¿con los dedos?
Profesor Rodolfo: ¿Con los deditos?
Profesora: Con los dedos, o sea (…).
Profesor Rodolfo: ¿Y cómo supiste que tenías que parar en 44?
Estudiante 5(Kevin): Porque (…).
Estudiante 4 (Santiago): Mentira, mentira, voltéele la hoja… Pere, Pere, Pere… aquí estaba haciendo un mamarracho [Santiago voltea la hoja de Kevin, y señala unos trazos que se ven como si hubieran sido borrados].
Profesora: Ah porque, que (…) acá (…) ah ¿pero por qué lo borraste? [señala lo que Kevin borró, ¡no lo borres!
Estudiante 4 (Santiago): Él lo borró.
Profesor Rodolfo: No, escríbelo... hazlo por favor… hazlo, porque es que eso es importante… porque ahí es que explicas tú como lo haces [Kevin procede a reescribir lo que había borrado]...
Profesora: ¿Cómo lo hiciste Esneider? [Esneider voltea la hoja del reverso, al derecho]... ¿cómo?
Estudiante 6 (Esneider): (…).
Profesora: ¿Cómo sabías que es 44?
Estudiante 6 (Esneider): Ehh… por… en el diez, van… 29, entonces le sumo (…).
Profesora: ¿Cómo sabes que en el 10 hay 29?
Estudiante 6 (Esneider): Porque… en el seis… iba sumando hasta el diez… y en el diez
Profesora: Ah ya, y en el diez paraste y dijiste “en el 10 hay 29”, ah listo, y que pasó

Estudiante 6 (Esneider): Entonces le sumé hasta el quince [hace un movimiento con la mano como indicando “siguiente”], lo… tres números hasta el quince, y… dio 44
Profesora: ¿Y con qué sumaste?, ¿dónde hiciste la suma?
Estudiante 6 (Esneider): Con los dedos.
Profesora: ¿Con los dedos?, ¿lo sumaste con los dedos?... listo… … bien, ahora, ah bueno, pero entonces Santiago, listo, entonces bueno, a ver [gira la hoja de Santiago “al derecho”], quiero que miremos esto porque es que a Santiago le dio 27, ¿por qué a Santiago le dio 27? Entonces miren… Santiago ya nos había dicho esto… había dicho “lo que pasa es que yo tengo que sumar acá [señala el término 6]… nueve veces por… para llegar al término quince”, Santiago sumó… sumó éstos 27 [voltea la hoja por “el revés”, e indica la suma que eh Santiago escribió]… ¿cierto?... pero… tenía que sumarle que… … ¿qué tenía que sumarle? … …
Estudiante 6 (Esneider): Catorce 3.
Profesora: Ummm noooo (…) es que mira (…) no, mira Santiago, o sea, aquí te dio veintisiete porque sumaste estos nueve [señala con el índice derecho la suma que escribió Santiago en el reverso de la hoja], pero antes… ¿cuántos había? [todos los estudiantes contestan a la pregunta casi al mismo tiempo, por tanto es complicado conocer las respuestas de cada uno]… habían diecisiete, ajá, muy bien
Estudiante 4 (Santiago): … pero me guie para hacer esa con el término cinco, no ve que… se le tienen… que poner o… para que… tiene que quedar quin… en quince.. para que se resuelva tiene que quedar en quince…
Profesora: Ajá…
Estudiante 4 (Santiago): Por eso, y más… se le suma uno que va ahí [señala con el dedo índice derecho el término 6]… el su… le sumo el nueve… porque para… porq… cinco ya… ya habían hecho cinco términos…
Profesora: Ajá, sí…
Estudiante 4 (Santiago): Y los otros cinco, ¿cuantos faltaban para llegar a quince?
Profesora: Diez
Estudiante 4 (Santiago): Sí, más el…
Profesora: El que es seis, muy bien [tanto la profesora como Santiago señalan el término número 6], o sea, hay que sumar nueve, pero entonces mira lo que te quiero decir, o sea, este diecisiete [con su índice, hace una circunferencia alrededor del término 6], tenías que sumarle éstos 27 [voltea el taller y señala el resultado de la suma hecha por Santiago], y si tu sumas 17 con 27 ¿cuánto te da?... súmalo… … …
[El estudiante toma el lápiz y piensa en lo que e dijo la profesora, y luego cambia la escena, donde se ve enfocado el taller de Luis]
Profesor Rodolfo: La pregunta es: “¿Cuál es el término correspondiente al término 100?”, cómo lo hiciste
Estudiante 7 (Luis): Pues al 100… lo multiplico por dos, y le sumo otros 100… que es lo mismo… ¿no? Y a ese resultado… que me da… le resto 1…
Profesor Rodolfo: ¿Y por qué le sumas otra vez 100?
Estudiante 7 (Luis): Porque siempre acá pasa, por ejemplo, en la figura (…) 1 [señala el término 1 con el esfero]
Profesor Rodolfo: Sí
Estudiante 7 (Luis): Al 1… le tengo que sumar… … eh… a la 2 mejor, que es que esta no sé explicarla [señala el término número 2 con el esfero], al 2 le tengo que sumar otros dos ¿no? Entonces al resultado que me da, le quito 1, quedo el tres [ahora señala exactamente el

número que determina que término es]… me queda convertido en tres, y a ese tres… le quito… y a ese tres… ¿Qué?... y a ese tres le sumo otros dos y ese es el resultado… … en todas, hasta en la ocho mira; al tres [señala el término tres con el esfero], le sumo otros tres… y al… resultado que me da, le quito uno [señala con el esfero el número que está al lado de la palabra “término”, en el término 3], y le sumo otros tres, le resto uno y le sumo otros tres, y me da ocho [traza una circunferencia con el esfero levantado, es decir, en el aire, alrededor del número ocho, del término 3]… siempre va a ser esa… un ejemplo… … al cien le sumo otros… o lo multiplico por dos o le sumo otros cien
Profesor Rodolfo: Bueno entonces, si lo sumas… le sumas otros cien, te dio doscientos
Estudiante 7 (Luis): Como si lo multiplicara por dos
Profesor Rodolfo: Y luego al doscientos le restas uno, ¿por qué le restas uno? Luis
Estudiante 7 (Luis): [Luis indica la con el esfero la operación que realizó para la respuesta del punto 3 del taller] Porque… o también uno no lo podría hacer así sino… le pondría así `hace el movimiento de repisar la operación que hizo, en el aire], no le restaría el uno, sino que le pusiera el noventa y nueve más, le sumaría noventa y nueve más… …
Profesor Rodolfo: ¿y por qué lo haces así? [Luis no brinda una respuesta transcurridos tres segundos] porque aquí… aquí… este cien [señala el cien de la operación con su índice]… como, como la pregunta es “¿cuál es el número correspondiente al término cien? [sigue la lectura de la pregunta con el dedo índice]” tu coges el cien, y le sumas otros cien
Estudiante 7 (Luis): Sí (…) porque al término le sumo este mismo [indica el término con el esfero]…
Profesor Rodolfo: Por qué, ¿por qué le sumas el mismo?
Estudiante 7 (Luis): ¡Porque en todos pasa lo mismo!... …
Profesora: ¿Sí?, ¿en todos da lo mismo?, a ver, miremos acá… en el término 4 [señala el término 4], entonces si es el término 4, le sumo… a cuatro le sumo cuatro, da ocho
Estudiante 7 (Luis): Ocho [escribe ese número a un lado de la respuesta del término 4]
Profesora: Y luego ¿Qué pasa?
Estudiante 7 (Luis): Le quito una, da siete, y al siete le sumo cuatro [cuenta con los dedos cada número de la siguiente forma: cuando nombra el”siete”, levanta un dedo, cuando nombra el “ocho”, levanta otro dedo, así sucesivamente]… siete… ocho, nueve, diez, once… y da once.
Profesora: Y acá [señala con rapidez el término 5]…
Estudiante 7 (Luis): También mire [señala el término cinco con el esfero]
Profesora: Cinco… diez…
Estudiante 7 (Luis): Le quito una, le sumo cinco, da catorce… nueve… diez… once… doce… trece y catorce
Profesora: Y entonces acá ¿por qué restas uno? [señala la operación que Luis realizó para la solución al punto 3 del taller]
Estudiante 7 (Luis): … ¡porque acá también! [señala, con un movimiento algo ofuscado, los términos del inicio del taller] Porque mire… aquí le sumo otros cien [señala la operación hecha]
Profesora: Sí
Estudiante 7 (Luis): Me da doscientos
Profesora: Sí
Estudiante 7 (Luis): Entonces al doscientos le tengo que resta uno, que a todos le estoy restando
Profesora: Ah sí, a todas le está restando uno, sí tienes razón

Estudiante 7 (Luis): Me da 199 [simula que escribe de nuevo ese número encima del que ya hizo, pero con el esfero levantado, por tanto, no hace algún trazo]
Profesora: Y luego le sumas el número de la figura… … ah sí, es que él lo hace así… sí, mira acá (…).
Estudiante 7 (Luis): Y me da 299.
Profesora: Porque es que [“voltea” la hoja], él lo que hace es esto [señala unas operaciones que tiene Luis al reverso de la hoja], o sea, el coge el número de la figura, lo multiplica por dos… el resultado le resta uno, y le vuelve a sumar el número de la figura… …
[El video se corta, pero sigue la plática con Luis].
Estudiante 7 (Luis): (…) otro seis, el resultado me va a dar otro seis [cada paso que dice de la opción, la señala con el esfero en la que él ya tiene resuelta], le sumo otro seis, y…bueno, estoy con la del seis [comienza a escribir las operaciones que va nombrando], la del seis… le sumo otro seis… … y a ese mismo seis, le vuelvo a sumar otro seis… me da igual 18 [sigue con el proceso de escribir cada paso de la operación que realiza, intercambiando de esfero continuamente, ya que los números los hace con esfero de mina negra, y los operadores con esfero de mina roja] , y a 18 le resto una… igual… dieci… siete, que es lo mismo que estoy haciendo acá.
Profesora: A ver, otra vez… que no vi, no vi, ¡no vi! [“voltea” el taller de Luis] Ajap, perfecto… ¿esta es la figura seis? [señala con el dedo el procedimiento que hizo Luis para el término número 6]
Estudiante 7 (Luis): Ajá… si, es la seis [señala con un esfero lo mismo que señala la profesora].
Profesora: Entonces… … sumo seis, tres veces, y le resto una… pero yo quiero ver si [“voltea” la hoja de Luis], si funciona acá con ésta [señala el ejercicio 4]… si fuera el término 100, entonces ¿cómo sería?
Estudiante 7 (Luis): 100, más 100 [escribe las operaciones que hace, al lado de la solución que él planteó para ese punto].
Profesora: 100 más 100 (…).
Estudiante 7 (Luis): (…) más 100 (…).
Estudiante [no se reconoce quién es el que menciona]: Ah sí sí, sí funciona… si porque da 300 y le restamos una.
Profesora: Y le resto una (…) uy (…) esa está más fácil (…) ¿cierto?
Estudiante [parece ser que es el estudiante del penúltimo diálogo hasta ahora]: Sí (…).
Profesora: Y le restas una.
Estudiante 7 (Luis): Ah (…) queda doscientos noventa y (…).
[Se corta la escena, y ahora el profesor Rodolfo se encuentra sentado en la mesa con unos estudiantes]
Profesora: Listo profe.
Profesor Rodolfo: ¿Cuál es el número que corresponde al término quince?, a ti te dio [señala con un esfero la respuesta en el taller de Jenny] … 30 porque multiplicaste 15 por 2, y a Jennifer [señala el taller de Jennifer, pero no posa el esfero sobre el taller, a comparación con la acción anterior] le dio 44, e… explícale a Jenny cómo fue que lo hiciste a ver… con todos los detalles
Estudiante 10 (Jennifer): Es que... Umm… es que yo… ¿Qué? Yo acá [le da la vuelta a la hoja, deja a la vista el reverso de ésta]… por acá atrás lo Umm…
Profesor Rodolfo: ¡Hazlo! Hazlo, ¡rayen la hoja!

Estudiante 10 (Jennifer): [Toma un lápiz de su cartuchera] Yo acá umm… coloqué… el 17 [escribe el número 17 al respaldo de su taller] y le coloqué el… lo, le coloqué acá su número, y acá el 18 [escribe el 18 debajo del 17], acá el 18 lo mismo, y al 19 hasta que me… juju… del 6 al 15 le coloqué acá al frente los números para… para…
Profesor Rodolfo: Hazlo, hazlo, no importa… no importa que nos demoremos
Estudiante 10 (Jennifer): [Borra los números que había escrito]… … la figura 6 tiene… umm… 17, la figura 7 tendría 20 [escribe el 7 a la izquierda, y el 20 a la derecha, y así va formando una columna donde. A la izquierda se encuentra la figura, y a la derecha el número que le corresponde, según la secuencia], la figura 8, 23, la figura 9, 26, la figura 10… 29, la figura… 11… [le suma 3 a 29, usando los dedos]… la figura 11 tendría umm… 32, la figura… 12 tendría 35, la figura 13 tendría 38, y la figura 14 tendría… [los siguientes tres números os cuenta usando sus dedos de una mano] 39, 40, 41, tendría 41, y la figura 15, 44.
Profesor Rodolfo: Así fue como lo encontraste
Estudiante 10 (Jennifer): Sí, sumándole 3…
Profesor Rodolfo: Y tú, ¿por qué procediste así Jenny… que… qué te llevó a… a hacerlo de esa manera [Jenny no omite palabra o gesto alguno con respecto a la pregunta, en un lapso de aproximadamente 15 segundos]
Profesor Rodolfo: Pero esto es para términos pequeños, pero si (…) ¿el término es el término 80000?, ¿cómo lo haces?
Estudiante 10 (Jennifer): Pues… pongo… el número 80000 [escribe en el respaldo de la hoja el número 80000] (…) número 80000, lo multiplico por 3 [escribe el 3, de tal forma que quede como la forma usual de multiplicación que conocemos, comienza a resolverla, y cuando tiene que multiplicar 8 x 3, chasquea los dedos hasta acordarse cuánto da ese producto] (…) y (…)
Profesor Rodolfo. ¿Por qué lo multiplicas por 3?
Estudiante 10 (Jennifer). Porque eh… a todas las figuras [desplaza un dedo de arriba hacia debajo de las dos columnas de números que tiene al respaldo del taller] le estoy sumando 3 [indica esa cantidad con los dedos]… y después le resto 1
Profesor Rodolfo: Y después le restas 1(…)
Estudiante 10 (Jennifer): Y me da el resultado
Profesor Rodolfo: Tú qué opinas Jenny… ¿te convence?
Estudiante 11 (Jenny): Sí
Profesor Rodolfo: ¿Sí?...
[El profesor Rodolfo chasquea los dedos, y allí se pasa a otra escena]
Profesor Rodolfo: ¿Cuál es el número que corresponde al término… al término 15? ¿no?
Estudiante 8 (Héctor): Al término 15 como este es indica el término con el lápiz], entonces le voy a multiplicar siempre… 15 por 2 [señala la operación escrita por él como parte de la solución: 15*2=30], que me daría 30, después le sumo (…) le sumo 14 [sigue indicando la operación escrita por él, pero el segundo renglón: 14, que nos da 44], que nos da 44, que es un poquito más fácil.
Profesor Rodolfo: Y éste 14 [indica el número 14 de la operación anterior, haciendo una circunferencia alrededor de él, pero sin trazar la circunferencia]… ¿de donde sale?
Estudiante 8 (Héctor): Porque la… el término anterior, es 14… por ejemplo… … como va en término 14, 15, 16 entonces se hace… se ha… ujum… así yo lo coloco…
Profesor Rodolfo: Y… por ejemplo como… como le hiciste para el término 100 [señala la solución que Héctor planteó a ese punto]

Estudiante 8 (Héctor): [A cada número al que se refiere en este párrafo, lo señala con el lápiz] Coloqué 100 y lo multipliqué por 2, que me daría 200… la… el término anterior es 99 entonces ese resultado lo coloco ahí y lo… y lo sumo, y me daría 299…
Profesor Rodolfo: Y este 99 [señala el número 99, de la operación que Héctor dio como respuesta] es porque… ¿corresponde al término anterior?
Estudiante 8 (Héctor): Anterior del 100.
Profesor Rodolfo: Del 100.
Estudiante 8 (Héctor): (…) Sí señor.
[El profesor Rodolfo chasquea los dedos, y cambia la escena]
Profesor Rodolfo: La anterior, corresponde a la entrevista focal número 3. A continuación, vamos a realizar la entrevista número 4, con Luis Felipe Giraldo.
Profesor Rodolfo: Po… por… por qué esta pregunta [indica la pregunta 4, en la segunda del taller], es diferente a éstas [muestra las primeras tres preguntas del taller, ubicadas en la primera hoja]… ¿Por qué?
Estudiante 7 (Luis): Porque… en ésta [pone la punta del esfero arriba del enunciado de la pregunta 4], me están dando el número… el número que va arriba, no el número del término sino del que va arriba… 8 [intenta escribir un 8, pero lo hace borroso, que no se note por completo, en donde puso la punta del esfero anteriormente]… bueno, el que va arriba ¿no?...
Profesor Rodolfo: Sí.
Estudiante 7 (Luis): Y en éstas [muestra la hoja 1 del taller], me están dando el que va… abajo, el término, o sea el que va abajo…
Profesor Rodolfo: Bueno… y… bueno, entonces, ehhh son diferentes [pasa de la hoja 1 a la 2, viceversa], muy bien; bueno, con respecto a éstos… a éstas preguntas [señala las tres primeras] que son como iguales, muy similares, que son como similares… si yo te preguntara… que me calcules el número… o que me expliques cómo es el procedimiento para saber o para calcular el número que corresponde… al término… 8344 [voltea el taller y lo deja por el reverso hacia arriba]… el término es 8344 [Luis copia el número]. Cómo… cómo sabemos Luis cuál es el número que va… tu dices arriba ¿no?, el que va arriba ¿cierto?
Estudiante 7 (Luis): (…) ¿Puedo hacerlo en el cuaderno?
Profesor Rodolfo: ¡Haz lo que quieras!
Estudiante 7 (Luis): (…) Lo multiplico por dos [comienza a realizar la operación "8344*2, y murmura algunas cosas]… … … sería ese ¿no? [señala el resultado que le dio al resolver la multiplicación]
Profesor Rodolfo: Ujum.
Estudiante 7 (Luis): Y a ese resultado… me… menos 1 escribe la resta que él indicó]
Profesor Rodolfo: Sí.
Estudiante 7 (Luis): Menos [sigue haciendo la resta, y murmura algunas cosas que no se entienden]… … igual 8… … bueno, este es 6, 6, ¡listo!, y… a este resultado que dio, le sumo otros [comienza a hacer a operación que nombró, en el reverso del taller, hace cuentas con los dedos también]… …ocho mil cuatrocientos… 8344… dos
Profesor Rodolfo: Si yo te… si yo te preguntara esto… y si yo te preguntara… ahora el término èsvrine la palabra 2término" atrás del taller de Luis]... el término eh… es… el término… eh… un término cualquiera, ¿sip?, cualquiera. Vamos a colocar aquí inicialmente "cualquiera" [escribe frente a la palabra "termino" la palabra "cualquiera"]. Si el término es "cualquiera", ¿cuál es el número?

Estudiante 7 (Luis): ¿9000?
Profesor Rodolfo: ¿9000? ¿por qué?
Estudiante 7 (Luis): Porque ese es un número natural y se puede.
Profesor Rodolfo: Pero, o sea, si e… si el término es cualquiera [señala la palabra "cualquiera"], ¿el número es 9000?
Estudiante 7 (Luis): Sí, puede ser.
Profesor Rodolfo: ¿Sí puede ser?
Estudiante 7 (Luis): Ujum.
Profesor Rodolfo: Y po… y… y… ¿cómo obtienes 9000? ¿de dónde te da 9000?
Estudiante 7 (Luis): (…) yo sé que es cualquiera, no me están diciendo el número, sino el que yo quiera ¿no?
Profesor Rodolfo: Ajá, ajá.
Estudiante 7 (Luis): Entonces yo puedo por ejemplo, coger el 9000
Profesor Rodolfo: ¿Cómo haces para responder… ésta [le señala la pregunta número 4]
Estudiante 7 (Luis): Al… 803 ¿no?
Profesor Rodolfo: Ajam.
Estudiante 7 (Luis): [escribe el número 803 en el espacio que hay en el taller para contestar la pregunta 4] le sumo 1 [cada operación que nombra, la anota en el espacio designado para la respuesta a esta pregunta]… que me da 804, y éste resultado lo divido en 3… … umm ¡uy no! Me queda difícil.
Profesora: Noo no está tan difícil.
[Comienza a mover el esfero alrededor de la división que escribió, ya que no sabe qué responder; cuando está dividiendo 804 entre 3, el profesor interviene con frases como "6 por 2", para ayudar a resolver la división, no alcanza a terminar la división, y la escena es cortada, cuando se reanuda, la división ya está terminada]
Profesor Rodolfo: ¿A qué término corresponde el término 803?, entonces tu dices: "el término 803, yo le sumo 1", ¿por qué le sumas 1? [Luis hace un símbolo "+" que le faltó escribir]
Estudiante 7 (Luis): Porque… sería lo mismo que hacer… que por ejemplo… el doscientos [señala el cociente de la división con su esfero]… y para comprobarlo también lo puedo hacer así, el 268 ¿no? [lo escribe a un lado de la división] más 268 da [escribe la operación que mencionó, y murmura algunas sumas, al estar resolviendo la operación]… y ya, quinientos (…) a ese le resto una [escribe la resta, y dice "menos... una"], que da… cinco… [murmura otros números]. [cuando termina de hacer la resta] y a ese, le sumo otros… ¿cuánto? Doscientos… 264… 8 [corrige el "4" del número 264 por un "8"; realiza la suma, ayudándose del conteo con los dedos]
[Cuando Luis termina la suma]
Profesor Rodolfo: Po… ¿por eso es que tú lo haces así? [señala la división que estaba haciendo al inicio de la solución del punto 4]
Estudiante 7 (Luis): Ujum.
Profesor Rodolfo: ¿Sí?
Estudiante 7 (Luis): Porque de todas formas si hago el mismo procedimiento [indica de arriba abajo las operaciones que resultaron después de la división], me da esto [señala el dividendo de la división], y por eso siempre le voy a sumar 1, porque éste uno que le sumo [señala el 1 que le sumó a 803] es el que le descuento acá [señala la operación "536-1], ¿sí ve? Por eso.

Miércoles 09 de mayo del 2012 – Sesión número 7

Rodolfo: Los niños están trabajando el instrumento número tres y están en estos momentos abordando la pregunta número tres.
Inicio en la mesa de estudio
Profesora: ¿En el término 2?
Niños: 5.
P: ¿En el término 3?
Niños: 8.
P: Listo. La pregunta es ¿En el término 100 qué número voy a tener? [Señala con el dedo el 8 (tercer término)]. ¿Cómo hago para saber eso?
[Los niños se miran entre sí]
P: ¿Cómo lo hiciste Santiago? Ven, déjame ver.
Santiago: Con mamarrachos.
P: A ver con mamarrachos ¿Cómo fue con mamarrachos?, ah bueno entonces miremos los mamarrachos de Santiago, ¿listo?, ¿Entonces dónde está el cuarto? [Busca el cuarto punto en la guía] Miren aquí está la respuesta [Señala la respuesta] Santiago dice que en el término 100 va a estar el número 102, ¿listo? Entonces miremos ¿Qué hiciste? Explícanos
S: Sumar de tres en tre en tres en tres en tres en tres en tres en tres
P: Sumar tres tres y ¿Cuántas veces?
S: Eh.
Otro niño: Cien, ¿cien veces tres?
P: ¿Cuántas veces?
S: Ahí ¿Cuántas dice?, 30
Otro niño: No.
S: 30 veces
P: ¿30 veces? ¿Y por qué 30 veces?
S: 30 veces porque tiene que ser 30 veces para que dé el número 100.
Otro niño: (Dice algo pero no es entendible, pero no está de acuerdo con Santiago)
S: Mire cuente en uno en uno hasta diez, y cuente si fuera de 100 en 100 de 10 en 10
Llegan a la mesa de estudio dos niños más (1:36 a 1:56)
P: Córrete acá un segundito. ¿Qué se hizo Héctor? Héctor ven. Bueno entonces ustedes que acabaron de llegar, listo, entonces vamos a hacer lo siguiente, miren estamos en el siguiente ejercicio [Héctor y Luis se acomodan en la mesa de estudio].
La profesora pone al tanto a los nuevos integrantes de la respuesta de Santiago
P: Miren lo que estaba haciendo Santiago. Santiago ¿por qué estás sumando cada vez tres tres tres? ¿Por qué tres?
S: Porque aquí dice [Señala con la mano izquierda los términos dados 1, 2 y 3], porque en el término 1 hay dos [muestra dos dedos]
P: Sí.

S: Pero para que de 5 [Señala el 5 (segundo término)] tiene que sumarle 3 [muestras tres dedos], y al 5 [señala el 5 (segundo término)] se le suma 3 [muestra tres dedos] y da 8 [señala el 8 (tercer término)].
P: Ah bien, entonces miren, ah bien. Entonces miren lo que está haciendo Santiago. Santiago está calculando el término cien, pero para eso pues tiene que sumar tres mas tres más tres más tres [Señala con la mano derecha la respuesta de Santiago] ¿Cuántas veces dices tú que estas sumando? Él dice que 30 ¿Listo?
S: 30 veces 3.
P: Pero imagínense, o sea imagínense todo lo que tienen que sumar [Señala con la mano derecha la respuesta de Santiago] ¿Listo? En cambio, y bueno le dio ¿Cuánto? 102, ahora miremos Luis y Héctor.
S: Me iba a dar 104 pero, tuve que descontar 1.
P: ¿Tuviste que descontar 1?
S: Sí porque es que, toca disminuirle un 3, porque ahí no alcanzaría porque… quedarían… quedan… esto no no no [Niega con la cabeza]
P: No, ¿No le descontaste?
S: No no no [Niega con la cabeza]
P: Pero bueno quiero que miren una cosa, si nosotros utilizamos ese proceso que está haciendo Santiago ¿Qué tal yo les ponga acá [Señala la respectiva pregunta de la guía] el termino mil? ¿Listo?
S: Yo le pongo medio millón.
P: Medio millón, imagínense que tal que les ponga acá [Señala con la mano la respectiva pregunta de la guía] el término medio millón ¿Ah?, o sea 500.000.
S: ¿500.000?, le pongo 250.000.
P: Miren esta forma, quiero que miremos esto de acá, miren [Muestra las guías de Héctor y Luis], tanto Luis como Héctor dijeron que era 299 [Señala con el dedo de la mano derecha la respuesta de Héctor y Luis], pero pues vamos a mirar por qué ¿listo? Entonces Héctor explícame ¿Por qué 299?
Héctor: Porque como este es el término 100 [Señala con el lápiz] entonces lo tenemos que multiplicar por 2, que me daría 200 y el termino anterior del 100 es 99 y eso se lo sumo al 200 y me da 299 [Señala con el lápiz cada parte de su respuesta].
P: Bueno, pero entonces ahí, tengo, tenemos varias preguntas. Entonces ¿Por qué por 2? [Señala la multiplicación por el 2] Explícanos ¿Por qué por 2?
H: Porque acá en el término 5; por ejemplo en el término 2 [Señala con el lápiz el termino 2], tenemos que multiplicar ¿2 por 2?, 4, y como el término anterior es 1 [Señala con el lápiz el termino 1], entonces le sumamos ese acá [señala con el lápiz el 5 (segundo término)] y me daría 5.
P: Como el término anterior es; o sea, el término anterior es 2 [Señala el número 2 con los dedos índices], tú estás hablando de este de acá [señala con el dedo el termino 1].
H: Sí señora [Señalando con el lápiz el término 1].

P: Entonces miren, miremos si lo que dice Santiago es cierto, entonces recuerden que esto es una secuencia [Señala con la mano derecha la secuencia] y la idea es que en la secuencia voy a utilizar el mismo proceso ¿listo? Vamos a ver si con todos los números se cumple. Entonces tú dices que el término 2 [Lo señala con el dedo] entonces lo múltiplo por 2, da 4 [Señala con el dedo el segundo término] y le sumo este [Señala el termino 1], 1, 5. El término 3 [Lo señala con el dedo], lo multiplico por 2.
H: Que me daría 6 y como el término anterior es 2 [Lo señala con el lápiz] entonces me daría 8 [Señala con el lápiz el 8 (tercer término)]
P: Listo. ¿Y el término cuatro? [Señala con el dedo la guía]
H: Eh, lo multiplico 4 por 2 que me daría 8 y le sumo 3, que me da 11.
P: Ah, ¿Si se dieron cuenta de esto?
H: Es mucho más fácil.
P: Miren, entonces miremos. Entonces él dice, ah bueno es mucho más fácil, o sea que estoy utilizando el número de acá [señala los números del termino 1, termino 2 y termino 3]. Y ahora Luis ¿Tú como lo hiciste? ¿Lo hiciste igual o diferente?
Luis: Diferente.
P: A ver ¿Cómo es diferente?
L: Yo digo que es el 299, porque primero, al 100 le sumo otro 100 y a ese resultado le quito 1, que me da 199 y le sumo otro 100.
P: Bueno ¿Y por qué le sumas 100 y por qué le quitas1? [Señala las operaciones realizadas por Luis] Explícame ¿Por qué?
H: Le sumo 100 porque en todas pasa lo mismo
P: A ver, explícame eso en que todas pasa lo mismo
H: Si es el término 3 [Señala el término 3], le sumo 3 más 3, 6, le quito 1 que me da 5 le sumo 3, que da 8
P: Y con el termino 2 [Señala el término 2]… A ver esperen porque ustedes no me están prestando atención a lo que está diciendo Luis, ¿Tú sí? Bueno, Santiago mira, mira este de acá [Señala la respuesta de Luis], tú no has entendido entonces mira.
En la mesa de estudio hay algunos estudiantes nuevos
P: ¿Qué no entendiste?
Esneider: Porque no sé si multiplicar, sumar..
P: O sea, no sabes hacer eso. Bueno entonces mira, vamos a partir de lo siguiente ¿listo?, tenemos la secuencia, vamos a mirar la secuencia, entonces mira, bueno el termino 1 es 2, el termino 2 es 5, termino 3 es 8, termino 4 es 11 [Señala con el dedo de la mano derecha cada término de la secuencia]. A ver ¿Quién me explica porque nos dio 11 la vez pasada?
Niños: Mmm, porque se le va sumando 3.
P: Exacto, entonces miren, porque es que la secuencia yo voy sumando tres, entonces miren al 2 le sumo 3, 5, al 5 le sumo 3, 8, a 8 le sumo 3, 11, luego 14, 17 [Señala cada número nombrado en la secuencia] y así sucesivamente ¿Listo? Esa es la secuencia ¿Si? Y eso es lo que caracteriza la secuencia, pero no es la única manera de caracterizar la secuencia. Entonces resulta que, en esa otra mesita varios niños hicieron lo siguiente miren, les voy a

contar, ah bueno ustedes que estaban en la mesita vamos a contarles lo que nos explicó Héctor ¿Listo? Entonces mira ¿Te recuerdas un poquito de cómo lo hizo Héctor? ¿No?
E: Más o menos.
P: ¿Más o menos? ¿Qué entendiste? ¿Qué le entendiste tú a Héctor y a Luis?
E: Mmm a Héctor le entendí que a 100 lo multiplico por 2, y el resultado que me dio abajo (…) eh (…) hasta ahí me acuerdo.
P: ¿Hasta ahí te acuerdas? Bueno es que yo tengo que buscar una manera, miren tengo que buscar yo una manera de poder relacionar este término 1 con este 2, este término 2 con el con este 5 [Señala con el dedo haciendo dicha relación], o sea ¿Cómo hago? Porque miren en la otra mesa ¿Dónde está Santiago? ¿Aquí está Santiago? Por ejemplo Santiago dice lo siguiente, ah pues si cada vez le sumo 3, pues yo voy a empezar a sumar tres tres tres tres [Señala la respuesta de Santiago] ¿Sí? Pero si yo les doy, por ejemplo, el término 100 pues sumar tres tres tres tres [Mueve la mano derecha haciendo referencia a la suma de todos los tres] ¿Cuántas veces tendría que sumar el tres?
Niños: 100.
P: ¿Por qué 100?
Niños: Porque es la figura 100.
P: ¿Por qué es la figura 100? ¿Seguro? ¿Sí? Entonces miren, vamos a mirar otra vez, no importa, a ver ustedes díganme lo que se les ocurra ¿listo? A ver ¿Cómo hacemos para calcular ese número 100? ¿Qué haríamos? ¿Qué podríamos hacer?
Niñas: Multiplicando.
P: ¿Multiplicando? ¿Cómo?
Sunner: Eh (…) 100 por 3 .
P: 100 por 3 y ¿Por qué por 3?
Yaneth: Porque se le va sumando de a 3.
P: ¿Por qué le voy sumando de a 3? Ah bueno, entonces miremos, a ver miremos, entonces le voy sumando 100 por 3 dicen ustedes, estoy hallando el termino 100 ¿Listo? ¿Y qué? ¿Y ya? Daría 300. Miremos acá en la secuencia. Lo que está diciendo Sunner, es que cojamos, por ejemplo si es el termino 1 [Señala el termino 1], entonces ¿Por quién lo tengo que multiplicar?
Niños: Por 3.
P: Por 3, pero 1 por 3 ¿Cuánto me da?
Niños: 1 por 3… mmm (…)3.
P: 1 por 3, 3, y acá [Señala el número 2 (primer término) ¿Qué número hay?
Niños: 2.
P: Entonces me hace falta algo, ¿Qué hago?
Niña: Ah multiplicarlo por 2.
P: Y bueno si lo multiplico por 2 dicen. El término 1 lo múltiplo por 2 me da 2 ¿listo? Pero miren este de acá, el término 2 [Señala el 5 (segundo término)], si lo multiplico por 2 ¿Cuánto me da?
Niños: 4.

P: ¿Y aquí hay un? [Señala el 5 (segundo término)].
Niños: 5.
P: Entonces no, tampoco puede ser. ¿Entonces qué hago? Miremos estos de acá y mirando estos de acá [Señala la secuencia dada, términos 1, 2 y 3] vamos a tratar de mirar el termino 100, entonces ¿Qué otra cosa puedo hacer? O sea, ¿De qué otra manera puedo caracterizar la secuencia, que no sea sumando 3? [Mueve la mano derecha en forma de secuencia] Entonces por ejemplo, Yaneth decía es que yo cojo este de acá [Señala el 2 (primer término)], le pongo este de acá [Señala el 5 (segundo término)]. ¿Si te acuerdas? ¿Cómo lo hacías? A ver explicamos ¿Cómo lo hacías?
(A Yaneth le da pena, y baja su cabeza contra la mesa)
P: ¡Dale! Ayer me dijiste que este 2 salía ¿De?
Ya: Este 2 [Señala con el dedo de la mano derecha el 2 (primer término)] salía de este 1 [Señala el término 1] y se ponía en el 5 [Señala el 5 (segundo término)], y… ya no me acuerdo [Se toca la frente]
P: ¿Ya no te acuerdas?
Ya: [Niega con la cabeza].
P: ¿A ver cómo hago? ¿Cómo hago para sacar estos números? A ver pensemos de otra manera de sacar los números, por ejemplo, bueno a uno se le ocurrió utilizar…
E: Utilizar libros de la biblioteca
P: ¿Utilizar libros de la biblioteca? No, entre nosotros solitos, a ver ¿A quién se le ocurre algo? ¿Qué necesitaría yo? Bueno, una pregunta si estos [Señalas los números de los términos 1, 2 y 3 de la secuencia con el dedo índice de la mano derecha] no fueran números, sino que tuviéramos los circulitos ¿Sería más fácil o más difícil para ustedes?
S: Eh (…) más fácil.
P: ¿Por qué?
S: Porque ya hicimos eso.
P: ¿Por qué ya hicieron eso? ¿Y cuál es la diferencia? ¿Por qué con los números es más difícil?
S: Tal vez porque… mire en la 6 [Refiriéndose a la guía].
P: Porque ¿Miro la 6? ¿La pregunta 6? [Busca la pregunta 6 de la guía].
S: Mire lo que toca del término [Señala la pregunta 6 de la guía].
P: Ah es que tú ya lo leíste todo, ¿Por qué los números son grandes? ¿Sí? ¿Eso es lo único difícil? No, porque la otra vez nosotros calculamos números grandes.
Niños: ¡Pero no tan grandes!... ¡Pero es más fácil!
P: ¿Es más fácil con círculos? O sea que si yo cambio estos números [Señala los términos 1, 2 y 3 de la secuencia] por círculos, ¿Sería más fácil? ¿Por qué?
Niños: Igual, sería igual.
E: No porque aquí se multiplica, y se resta y se suma, en la otra se sumaría
P: ¿En las otras se suman siempre?
E: [Afirma con la cabeza].

P: O sea ¿Aquí está muy difícil hacerlo en términos "----------"? ¿Y si yo les digo el término 1000? ¿También sigue siendo muy difícil? ¿Es más difícil? Bueno y ¿Si yo les digo el termino 10?
E: Eh (…) 29.
P: ¿Por qué 29? ¿Por qué 29? Explícame ¿Por qué?
E: Eh… porque ni 6 ni 7, hasta el 10 da 29.
P: ¿Y por qué sé que hasta el 10 da 29? ¿Cómo lo haces?
E: (Murmura algo sobre el 3)P: ¿Por qué qué?
E: Porque se va sumando 3
P: Entonces tú cogiste este [Señala el número 17], ¿Y qué?
E: Y cuando estaba haciendo la "-----------"me dio 29 en el 10
P: Ah porque tú ya lo habías calculado.
E: Sí.
P: Mmm… ¿Y si yo les digo termino 20?
Niños: Eh (…) sería (…).
E: 10, 44 le sumo "----------"
P: Del 44 y ¿Por qué del 44?
E: Porque en el 15 nos dio 44, entonces faltarían 5 para el 20.
P: 5 términos para el 20, entonces ¿Cuánto le sumo?
E: Eh… No sé [Niega con la cabeza], es que suma rápido "-----------"
Entra en la mesa de estudio el profesor Rodolfo con otros estudiantes
R: Bien. El término 2 ¿Cómo sería Yaneth? ¿3 por qué? ¿3 por 2?
Ya: 6.
R: 6, y según lo que dice Santiago [Señala a Santiago con el dedo pulgar de la mano izquierda], ¿Daría qué?
Niños: 5.
R: Al término 1 [Señala el término 1 con el lápiz].
Niños: Ya más o menitos.
R: ¿Ya más o menos? ¿3 por 1? [Mira a Santiago].
S: 3.
R: ¿Y le restamos cuanto dijiste tú? [Mirando a Santiago].
S: 1.
R: Entonces, por ejemplo el término 100 [Señala el termino 100 (en la pregunta 3) con el lápiz]. ¿Qué número corresponde al termino 100? Según la regla, 3 por 100 ¿Daria qué? Aquí ya lo hizo Yaneth [Señala la respuesta dada por Yaneth en la guía] ¿Daría qué?
Niños: 300.
R: ¡300! Pero según Santiago habría que restarle ¿Qué?
S: Pero esa ya sería la "-------------"
R: ¡Eso! Entonces por ejemplo, ¿Cuánto sería…qué número correspondería al término 100?
So: 299.

R: ¿Y si yo te preguntara el término 500? [Señalando a Sonia con la mano derecha] Según la regla que ha construido entre Santiago y ustedes [Los señala suavemente con la mano], entonces ¿El término 500 qué hace?
S: 499.
R: No, porque el término, lo que están diciendo ellos es que hay que multiplicarlo por 3
S: [Santiago cae en cuenta sobre lo dicho por el profesor] Ah… [Echando la cabeza hacia atrás].
R: ¿Cuánto daría 3 por 500?
[Los niños se quedan pensando por unos segundos].
R: Bueno 3 por 5 ¿Cuánto es?
E: 1'500.000 [Respondiendo a la primera pregunta].
R: Y dos ceritos [Uniendo los dedos índice y pulgar de la mano derecha].
E: 1500.
R: ¡1500! Pero según Santiago [Señalando a Santiago].
E: ¡1400!
R: 1400 ¿Qué?
Niños y R: ¡1499!
R: Por ejemplo tú ya entendiste [Refiriéndose a EEsneider] al término se le multiplica por ¿Cuánto?
E: Por 3.
R: Y según Santiago se le resta ¿Qué?
E: 1.
R: ¡Eso, muy bien! Entonces aquí habría que corregirlo. Entonces EEsneider [Busca un punto específico de la guía y lo lee] ¿A qué término…? [Pero se detiene y comienza a leer el siguiente punto] Bueno, Un niño piensa el número 903 [Niños: ¡Jum!] Un niño piensa el número 903 ¿Sí? Entonces la pregunta es ¿Este número, si es un número de la secuencia?
[Los niños quedan pensativos por unos cortos segundos].
R: ¿Cómo me explican que si o como me explican que no?
Niños: [Se ríen] Uno de los niños: ¿Explicar por qué?
R: [Chasquea los dedos] Multiplicando por… [Se corta la toma de esa escena].

El profesor Rodolfo se encuentra reunido en una mesa de trabajo con nuevos estudiantes
R: Si yo les preguntara en relación con las tres primeras preguntas [Guía] ¿Cuál es…llamémoslo la regla o el procedimiento o la forma o la manera para calcular, para saber cuál es el número que corresponde a un término que yo les doy? Por ejemplo aquí [Señala la guía] les preguntábamos el término 4, el término 5, el término 6, en la pregunta 2 [La señala con la mano] el término 15 y en la pregunta 3 [La señala con el dedo] el termino 100. Entonces eh… por ejemplo Jennifer, cómo dirías para el término 100 ¿Cómo lo hiciste tú?

Jennifer: Multiplicando 100 por 3 [Apoya tres dedos de la mano izquierda sobre la palma de la mano derecha] y le resto 1 [Deja el dedo meñique de la mano izquierda sobre la palma de la mano derecha], y así me da el número del termino 100.
R: ¿Y si yo te preguntará el término 7840?
J: Mmm… multiplico ese número por 3 y le resto 1
R: ¿Tú que dices Laura? ¿Estás de acuerdo? ¿Sí?
Laura: [Afirma con la cabeza]
J: Es que ella es callada profe [Jennifer abraza a Laura, y ambas se ríen]
R: ¿Sí?, pero necesitamos saber qué piensa, cómo piensa ¿Sí? ¿Tú que dices? [Se refiere a la niña que está a su derecha] ¿Estás de acuerdo o hay algo distinto que quieras…?
Jenny: Mmm… no, yo si estoy de acuerdo con Jennifer
R: ¿Sí?
Je: [Afirma con la cabeza].
R: O sea ¿Multiplicar por 3 y restarle 1? ¿Sí?
Je: ¡Sí! [Afirma con la cabeza].
R: Bueno, y si yo les pregunto, por ejemplo a Jimmy, ¿También estaría de acuerdo multiplicar por 3 y restarle 1?
Jimmy: [Afirma con la cabeza].
R: Y si yo le pregunto a Jimmy por ejemplo, quien quiera hablar levanta la mano, si yo le preguntara a Jimmy… Jimmy y ¿Por qué se multiplica por 3? ¿Por qué no multiplica por otro número? Jimmy Jimmy, dejemos pensar a Jimmy.
Ji: [Con las manos en la boca, niega con la cabeza].
R: ¿No sabes?
Ji: [Niega con la cabeza].
R: Dime Jenny, ¿Por qué aquí en esta secuencia según las reglas ustedes han establecido, por qué se multiplican por 3?
Je**:** Porque viendo estos términos [señala los términos 1, 2 y 3], el dos, uno suma 2, 3, 4, 5 [cuenta con los dedos de la mano izquierda] y el término 2 es el 5 [señala el término 2], [Sigue contando] 6, 7, 8 y el término 3 es el 8 [señala el término 3], entonces yo creería que es casi lo mismo acá, eh… el 3 pero lo multiplicamos y ahí si le restamos 1, y nos da el término 100 que es 299.
R: Bien, entonces ya nos has dicho por qué multiplicas por 3, y ¿por qué le restamos 1?, ¿Por qué Jimmy? , ¿Por qué le restamos 1?, ¿Por qué tenemos que restarle 1? O sabemos que, vemos que multiplicarle 3 y restarle 1 funciona para los ejemplos que tenemos acá, el por qué multiplicar por 3, pues Jenny nos lo ha explicado, pero, ¿y por qué restarle 1?
Je: Pues yo pensé hacerlo así, porque yo sucesivamente hice esto, pero no (…) nada, lo hice en papel, y me dio 300 y yo dije: para que funcionara le reste 1.
R: Por ejemplo, eso que dices que hiciste en la mente, Explícamelo con 2, 5 y con término 1, término 2, término 3, término 4, término 5 y término 6 [Señala con el dedo los términos de la guía que ha dicho].

Je: Pues yo (…)
R: Eso de multiplicarlo por 3 y restarle 1, a ver.
Je: Pues yo cogí el dual [Con el lápiz, señala el término 1 y el número 2], como ya te había dicho antes, el término 1 es el 2 yo le…yo hice el 3, 4, 5 [Cuenta con los dedos] y me dio el término 2 es 5 [señala el término 2 con el lápiz] y yo hice sucesivamente hasta llegar (…), y como vi que me dio (300).
R: Pero aplicando la regla que ustedes establecieron, ¿cómo sería para estos tres términos?, porque lo que dicen es que cogen el término y ¿lo multiplican por cuánto?
Todos: Por 3.
R: Eso es lo que ha dicho Jennifer, ¿y se le resta qué?
Todos: 1.
R: ¿Entonces con estos tres términos cómo sería?, ¿Cómo sería? Héctor.
H: Lo del término 1 multiplicaríamos…mmm..., no, ¿con el 1?, eh… multiplicaríamos 1 por 3, 3 (Quiere decir 1*3 = 3) y le restaríamos 1.
R: ¿Daría cuánto?
H: Daría 2.
R: Muy bien, ahora con el término 2, prueba a ver.
H: Eh… 2 por 3, 6 y le restamos 1 me daría 5.
R: ¿Y con el término 3?
H: 3 por 3, 9 y le restamos 1, 8.
R: ¿Sí?
Todos: Sí.
R: O sea, ¿tú haces esa fórmula distinta? O ¿cómo?
Luis: Si, por ejemplo, el término 1, [señala el término 1] al 2, al 1 le sumo 1, ¿no? Y el resultado que me da, le quito 1 y le sumo otro 1 y ese es el resultado.
(A continuación sus compañeros dicen: Se demora más)
R: Por ejemplo con el término 20, ¿Cómo haces?
L: ¿Al 20? [Empieza a hacer el ejercicio al respaldo de la hoja]
R: Con el término 20 a ver, porque esa es otra forma que ha encontrado Luis.
L: [Realiza el ejercicio al respaldo de la guía] 20, le sumo otros 20 y a este le quito 1, me da 39 y le sumo otros 20.

Ahora hay enfoque en otro ejercicio
Jenny: A 803, 1 [Quiere decir que a 803 le suma 1] me dio 804, dividido por 3, lo dividí por 3 y me dio 268, [Señala con el lápiz el procedimiento que realizó para llegar a esta respuesta] y yo lo comprobé 268 por 3 me dio 804
R: ¿Y por qué a 803 le sumas 1?
L: Yo profe!
R: ¿Quién sabe por qué a 803 le suma 1?
L: ¡Yo!
R: ¿Por qué Luis?

L: Yo le sumo el 1 porque ese es el 1 que yo le estoy restando en la otra operación [Señala con el lápiz el procedimiento que realizó], yo acá le sumo 1, porque este es el 1 que yo le estoy restando acá, y ya!

R: ¿Qué dices tú Jennifer? ¿Entiendes lo que dice Luis o no le entiendes?

J: La operación es diferente profe, es que él está restando y yo soy sumando, yo multiplicando y sumando también.

L: Da igual, da igual, porque usted, por ejemplo, este lo multiplica por 3, lo multiplica por 3 y entonces le va a quitar 1 (…) [Señala con mano derecha el procedimiento que realizó]

R: Esta fórmula o esa manera que ha encontrado Luis sirve para resolver la número cinco, por ejemplo, un niño pensó en el 903, y ustedes tienen la tarea de mirar si el número 903 está en la secuencia, como no tienen el tiempo de ponerse a hacer de sumarle 3, sumarle 3, sumarle 3, sumarle 3 [Mueve el brazo derecho simulando la suma de tres], entonces esto que ha establecido Luis, ¿si sirve? ¿Ustedes qué dicen?

- ¿Qué dices tú Luis, con respecto, por ejemplo, al (903), es un número que pertenece o no pertenece a la secuencia?

L: Que no pertenece.

R: ¿Por qué no pertenece?

L: Porque el 903 tendría que sumarle 1, ¿no? Le tengo que sumar 1 y que me da 904 y a ese resultado que me dio, lo divido entre 3 y el residuo, este [Lo señala con el lápiz] tiene que ser (0) en cambio acá el residuo tiene que ser 2, por eso es que digo que no es.

R: ¿Qué dice Héctor?

H: Mmm (…).

R: ¿Lo hiciste de manera distinta?

H: No [mueve la cabeza hacia los lados]

R: ¿Y entiendes lo que dice Luis?

H: Sí.

R: Jimmy, ¿tú qué dices?

Ji: (Mueve la cabeza hacia arriba y hacia abajo, luego mira hacia abajo y alza los hombros y hace un gesto de no saber) (los compañeros se ríen)

R: ¿Por qué sumarle? Dice Luis que le suma (1) porque es la operación inversa, cuando se piden las otras preguntas, ¿Sí? ¿Sí? [Chasquea los dedos].

R: ¿Por qué creen ustedes que estas secuencias son más difíciles que las que tenían figuras? ¿Por qué Jimmy?

Ji: Porque en la otra teníamos 1, entonces como habían [sic] circulitos era fácil de ver el (…), pero estos como ahora son números (…)

[A continuación otra niña dice: sí, son más difíciles]

R: ¿Por qué Jimmy? Y ¿Héctor qué dice? ¿Son más difíciles éstas?

H: Claro, porque estás es en números y las otras eran en círculos [Los compañeros apoyan esta idea].

R: Sí.

J: De sumarle 1 al 903 y ahí si dividirlo por 3 [señala el procedimiento que realizó con un dedo de la mano izquierda] y después hacer la operación a ver si es cierto o no
R: Ah (…) o sea que eso es lo que llaman la comprobación.
J: Antes de decir que no.
R: Ah (…) pero por ejemplo Luis la comprueba, tú dices que es necesario comprobarla también, ¿Héctor qué dice?
H: También, es necesario comprobarla.
R: Por ejemplo, por ejemplo, por ejemplo, por ejemplo... detrás de la hoja [Los estudiantes se preparan para resolver el ejercicio que va a plantear el profe] El número, el número, el número… 15732, ¿El número 15732 es un número que pertenece a la secuencia o no?, según lo que ustedes han dicho, entonces ¿cómo proceden?
[Los niños proceden a verificar si el número 15732 pertenece o no a la secuencia].
J: [Mueve las manos] Usando la operación.
R: Bueno, entonces ¿Cuál es la operación?
[A continuación un estudiante dijo: Yo digo que sí].
R: ¿Sí?, vamos a ver.

ENFOQUE EN EL EJERCICIO DE JENNIFER
R: Jennifer, ¿este que está acá [señala el número 15733] es este [señala el número 15732] que le sumaste cuánto?
J: 1
R: Ah… ya.
[Cuando Jhenyfer termina de realizar la división de 15733 entre 3 el profe pregunta:]
R: Entonces qué Jennifer, ¿es o no es?
J: Si, pero primero toca comprobar
R: Ah… ya.
[A continuación Jennifer hace la comprobación multiplicando 5244 por 3]
LUEGO SE ENFOCA EN EL EJERCICIO DE OTRA NIÑA
R: Qué dice Jimmy, ¿es o no es?
Ji: No es
R: ¿Por qué no es Jimmy?
Ji: No da.
R: ¿Por qué no da?

Ji: Porque faltaría un número, no sé…

[Otro niño dice: O también por que el residuo tiene que dar cero]

J: Cuando uno lo compruebe, tiene que dar el mismo resultado, para saber…

VIERNES 11 DE MAYO DEL 2012 – SESIÓN N° 8

R: Los niños están reunidos en pequeños grupos y en parejas, algunos estudiantes van a explicarles a otros estudiantes, lo que produjeron en relación con las preguntas de la secuencia numérica.

Profesora: …El tercer punto ¿listo?, Santiago, ven préstame atención acá [Santiago estaba distraído]

P: El tercer punto se trataba de lo siguiente: Decía la pregunta: ¿Cuál es el número correspondiente al término (100) de esta secuencia?

P: Vamos a recordar: Tenemos una secuencia numérica, el primer término era ¿qué?

Todos: 2

P: ¿El segundo término?

T: 5

P: ¿Y el tercer término?

T: 8

P: Nos pedían hallar el cuarto, quinto, sexto y todos los hicimos perfecto, pero en el tercero ya teníamos problemas, ¿listo?, entonces con los compañeros de cuarto, no, bueno, con los compañeros de cuarto tuvimos problemas aquí en este, pero con los niños de quinto no tuvimos estos problemas, entonces la idea es la siguiente:

Los chicos de quinto, le van a explicar a los chicos de cuarto cómo hacen para encontrar el número correspondiente al término 100, ¿listo?, entonces vamos a trabajar

P: Entonces Luis se va a encargar de Esneider y Yaneth

[Esneider dice que no quiere trabajar con ellos, no lo dice, hace gestos]

P: ¿Ah?

[Esneider le señala a Héctor]

P: ¿Tú quieres trabajar con Héctor? Bueno, entonces trabaja con Héctor

P: [Le dice a Luis] Entonces tú trabajas con Yaneth y con (…), pero entonces tu trabajas con los dos [La profe señala a dos estudiantes] ¿listo?

P: Y Jimmy trabaja con Sara y Santiago, ¿listo?

<u>TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES</u>

Héctor: … Multiplicarlo por 2 y te da 200, como el término anterior es 99, entonces eso lo vas a sumar con el 200, y ese es el resultado, queda 299 ¿Entendiste? [Señala el procedimiento que él realizó, para resolver el ejercicio con el dedo índice de la mano derecha]

H: A ver dime cómo entendiste

E: Eh… [Héctor le dice: pero sin mirar este, y le esconde el proceso que ya estaba hecho]... el 100 lo multiplico por 2 y me da 200 y como el termino anterior me dio 99 [Mueve las manos, con dos juguetes que tiene]

H: No, el término anterior es 99

E: El término anterior es 99 entonces eh… lo sumo y me da 299

H: ¿Sí entendió?

E: Sí.

E: ¿Ahora qué?

H: Venga a ver Kevin, se lo voy a decir de otra manera. Como es el término 100, entonces tú puedes multiplicar por 3 y te da 300 y le resta 1, entonces es más fácil. A ver ¿Cómo es?

Kevin: ¿Le sumo?

H: Como si usted me fuera a explicar a mí, pero suave… suave, explíqueme a ver usted.

H: Como es el término 100 entonces lo vamos a multiplicar por 3 y después le resto 1 y ya

R: Pero ¿por qué? Héctor, explícale por qué haces eso, en qué te apoyas para decir eso.

H: Por que mire en el término 2 lo vas a multiplicar por 3 y le restas 1 que va a dar 5 [Señala el número 5], ¿si ves?, pero ponme cuidado. Explícame a ver.

R: Por ejemplo cómo sería con el término 8, Héctor explícale a Kevin a ver, el término 3 perdón.

H: Entonces tú lo… 3 por 3, 9, le restas 1 quedaría 8, Explícame usted como si…

R: Y el término 4, término 5 y término 6, explícale a Kevin cómo lo haces siguiendo esa… cómo sería.

H: El término 4, entonces lo vas a multiplicar por 3, 4 por 3, 12 y le restas 1, quedaría 11. [Señala el procedimiento que él realizó] Y el término 5, [Señala el número 5] entonces lo multiplicas por 3 que es 15 y le restas 1, 14. Y el del 6, entonces el 6 lo multiplicas con 3 que es 18 y le restas 1 que es 17. ¿Entendiste?

K: Si. Listo.

H: Listo profe.

ENFOQUE EN EL GRUPO DE JIMMY

P: Entonces mira, lo que está haciendo Jimmy acá, entonces fíjate acá (…) acá qué está haciendo Jimmy, suma 1 y luego divide, [Señala el ejercicio de Jimmy] por eso es 268 y ya!, ¿cómo sacaste ese 400?

Ji: Poniendo la mitad.

P: Le sacaste la mitad, ¿sí?

Ji: Le saqué la mitad y le quité (…) [él señala con ambos pulgares el número 803]

P: La mitad de 803.

Ji: No es 400 [La profe se ríe].

P: Muy bien, mira primero la mitad de 803 no es 400.

Ji: le quité los 3 y le puse la mitad.

P: Bueno, ahora vamos a hacer este de acá, el quinto, dice: un niño piensa en el número 903, ¿sí?, el número 903 ¿pertenece este número a la secuencia dada? ¿será que yo puedo encontrar (…)?

Ji: ¡No!

P: ¿Por qué no Jimmy?

Ji: (…) a 903 [Saca un lápiz].

P: ¿Tú qué dices? ¿Que si o que no?
S: Sí.
P: ¿Que si?, bueno, vamos a mirar a ver Jimmy.
Ji: 903 le sumo 1 ahora lo divido por 3, me da 904 [Explica mientras realiza el ejercicio]
P: luego lo divides por 3, y ¿qué pasa?
Ji: entonces el resultado que me dé lo pongo aquí [es decir, que el resultado de la división lo coloca en otra parte de la hoja].
P: Y ¿qué resultado da?, es que quiero ver qué resultado da.
P: Bueno Jimmy nos está diciendo que no nos da porque aquí pasa algo [señala la división que está realizando Jimmy en la hoja].
P: ¿Entonces qué pasa?
Ji: 301 lo multiplico por 3 [Realiza la multiplicación y le da 903].
Ji: No da [Luego suma 1 a 903 y le da 904].
P: Entonces ya no daría, ya no estaría en la secuencia, ¿listo? Mira Santiago lo que está haciendo, mira, mira lo que hizo ahí.
P: Aquí, ¿por qué si estaba el 803?, porque le sume 1 (señala la suma de 803 más 1 que realizó Jimmy] y lo dividí en 3 y entonces me di cuenta que era el número 268 [Señala la división], pero es que aquí la división no es exacta [señala la división 904 entre 3 que realizó Jimmy] por eso es que te está dando acá diferente, ¿si?, listo y ahora el sexto: ¿cómo hacemos el sexto?
P: Escribe un mensaje a un compañero que no asistió a la clase, entonces bueno Santiago, con lo que te explicó Jimmy, entonces vamos a hacer este de acá, ¿Listo?, tú ya lo habías hecho.
ENFOQUE EN EL GRUPO DE SANTIAGO
S: Mire, pues ahí no más tuve hasta ahí está bien nomas que lo ...que me falto es restarle uno [escribe el numero -1 junto al número 300 en la hoja], porque así también se puede hacer porque así yo estaba haciendo aquí atrás, pero también podemos hacerlo distinto como Liliana, al 100, al 100, mira acá [señala al número 100] le sumo otro 100, y el resultado me da 200[señala el 200 y los números hacia abajo], al 200 le quito 1 y me da 199, y le sumo 100 más y me da 299, entonces asumo que este no es el mejor porque podemos hacerlo así [señala el proceso de la derecha 100+100+100=300,300-1=299] o podrías quitarle, multiplicarlo por 3 y quitarle 1.
R: Y ¿porque es que lo haces así?, en que te apoyas, ¿para hacerlo así?
S: En que, en todas, pues es lo mismo [señala la figura 2 5 8 de arriba].
R: Por ejemplo explícale eso a Yaneth.
S: Por ejemplo en la 1, [señala el término 2 que es el número 2] al 1 le sumo 3, le resto 1 y le sumo 1 me da dos, a la 5 igual [señala el número 5 y luego señala con el lápiz término 2 en un círculo] al 2 le sumo 2 me da 4, al 4 le resto una queda tres, y al tres ese le sumo 2 y me da 5[señala el número 5 del término 2] en todas.
R: Sí (…) ¿entendiste eso Yaneth?
Ya: Pues (…) sí.

R: Digamos con la (…) cuarta, explícale la cuarta a ver cómo es.
S: Donde estaba es... la del 803, ah mire entonces digo que, ¿al 803 no?, le tengo que sumar 1[señala el número 803 y luego el número 1], entonces el resultado que mi dio, que son 804, lo tengo que dividir en 3 y el residuo me tiene que dar 0[encierra el número 0 en un círculo], y si el residuo da 0 entonces el 801 si es divi, si es un, si es....
R: ¿Y qué es lo que haces tú a la derecha?
S: ah yo acá porque si da 0[señala la operación de la derecha], esta es la operación [gira la hoja y busca] la operación de acá para ver si me da, la operación esta de acá, para ver si me da este número 803, yo la hago así [vuelve a la hoja inicial y señala con el lápiz la operación a la que se refería el profesor], el 268, le sumo 268 al 268 me da 536, menos 1 me da 535 y le sumo otros 268 y me da 803
EN EL EJERCICIO DE JIMMY
R: [señalando la hoja donde está escrita la secuencia] Por ejemplo, con esa secuencia numérica que está ahí, trayendo la razón que dice Héctor y que dice Luis para ustedes cual sería el orden ahí, por ejemplo, para Jimmy cual sería el orden en esa secuencia numérica Jimmy, para ti cual sería[pregunta a Jimmy]
[Ji muerde uno de sus dedos, Ji cruza las manos, y se detiene a pensar]
R: ¿Qué dices tú ahí?, o sea ¿cuál sería el primer término? (...).
Ji: Este [señala con el dedo al número 4].
R: Y el segundo.
Ji: Este [Ji señala con el dedo al número 9].
R: Y el tercero.
Ji: Este [Ji señala con el dedo al número 14].
R: Para ti Jenny.
J: Pues lo mismo, este sería el uno [señala con el lápiz al número 4], este el dos.
[Señala con el lápiz al número 9], este el tres [señala con el lápiz al número 14] porque uno le va sumando de a 5, por ejemplo 4, cinco, seis, siete, ocho, nueve, me da el nueve,
[J cuenta con los dedos] diez, once, doce, trece, catorce, nos da el catorce [señala con el lápiz al número 14].
ENFOQUE EN HÉCTOR
R: Para ti (...) Héctor.
[Héctor observa la hoja mientras piensa]
R: Estás de acuerdo con ellos o....
H: Un poquito.
R: A ver, ¿por qué un poquito?
H: [H señala a las figuras de cuadros en la hoja] porque este y este están juntos y se parecían a la guía la primera que nos dieron, lo mismo que dice Luis [H señala el primer término de la secuencia de puntos] que aquí había un cuadrito, [H señala el segundo término de la secuencia de puntos] que aquí se ponían tres y acá cinco [H señala el tercer término de la secuencia de puntos] una guía parecida, sino que son punticos .

R: Ah, ah bueno y, y entonces con números, en esa secuencia numérica porque este no puede ser el primero.
[Señala al número 14] este el segundo [señala al número 9] este el tercero [señala al número 4]
E: eso no podrí... em serían los tres últimos términos señor porque al cinco [señala el numero 4] acá no podría al cero da menos una, y después acá seria menos seis, [señala la hoja con el lápiz] y después menos seis, siete...
R: ¿Y de dónde sacas esos números?, de donde sacas esos números menos uno y menos seis.
E: Porque esos números no son los números naturales, porque son menos, haya abajo, por debajo del cero, por eso no tienen.
R: Entonces por esa razón, el orden que ustedes establecen es ¿de izquierda a derecha? por eso no puede ser ¿de derecha a izquierda?
E: sí, por eso [Asienta con la cabeza].
R: Bueno y entonces si yo les pregunto con respecto a esa secuencia numérica que esta ahí, cuatro, nueve, catorce, si yo les pregunto ya...cuál sería el número...que corresponde... bueno como lo van a llamar, término, posición o como lo llaman.
Niños: Término.
R: ¿Término?, bueno, entonces vamos a llamarlo como ustedes dicen, término.
Entonces por ejemplo cuál es el...término...o a qué número corresponde el término diez
[Los niños se detienen a pensar mirando la hoja]
R: Pueden trabajar ahí en las hojas, detrás de la hojas si...
[E anota términos de la secuencia numérica y va contando cuál es el siguiente, anotando en la hoja sus resultados]
E: Ya, cuarenta y nueve.
R: ¿Cómo la hiciste tú Jimmy?
Ji: [Señala los números de sus resultados] pues aquí como 14, a la figura 4 le sume 5, a la 5 le sume otros 5, a la 6 que me dio 29 le sume otros 5, a la que me dio 29 también le sume 5, al 39 también le sume 5, al 44 también volví y le sume 5, y me dio 49.
ENFOQUE DE JENNY
R: Y Jenny, como está haciendo, ¿también?
Je: Sí, yo le sumé cinco a cada número y me dio 49 [encierra en un círculo su resultado]
Pues acá esta es el término 1, este es el 2, este es el 3, este es el 4, este el cinco, el seis, el siete, el ocho, el nueve, el 10 [enumero sus resultados escribiendo el numero de término junto a cada número].
R: Muy bien.
11: 08.
R: ¿Me repites otra vez lo que dijiste?
Su: Mira, Jeimi me explico que tocaba hacer una división y una multiplicación (señala a las operaciones hechas en su hoja), si me da este mismo número de acá (señala al resultado de

la suma =804) me queda bien, pero no me dio el mismo número de acá entonces no me quedo bien
R: Ujum, y porque...haces primero una división
Su: Para... pues, no sé.
P: ¿Por qué no sabe?
Su: No me explico eso
R: ¿No te explico eso?, quien sabe porque hay que hacer primero una división, a ver Yaneth.
Ya: No es que yo estaba esperando un man
[Los niños se ríen]
R: Ah, ¿quién sabe?
E: Se multiplica por 3.
R: ¿Y porque multiplicas por 3?
E: Pues porque a cada término se le va sumando 3.
R: Bueno, primero multiplicas por 3 ¿y luego que haces?
Niños: Se le quita 1.
R: Y, ¿por qué se le quita 1 Sunner?
Sunner: Para... por la secuencia del 3 (busca en su hoja la secuencia y la señala) que aquí el término 100, hay que hacer una multiplicación, entonces cien por tres da 300 ponemos unita, 299.
R: Umm ya (…)
E: Cierto que también se puede, multiplicar por 2 y...como el número anterior me dio
99, lo sumo y me da 299
R: ¿Y eso lo hacen es por la secuencia?
Niños: Sí.
R: Muy bien.
11:18.
R: Entonces, ahí hay lo que hemos llamado una secuencia de... cuadrados, o de rectángulos, bueno, entonces quiero preguntar, umm, para ustedes ¿cuál es la figura 1?
[Los niños señalan con el dedo a la figura con 3 cuadrados]
R: ¿Alguien no está de acuerdo?, bueno ahora les hago otra pregunta. Y porque no dicen que esta es la figura 1[el profesor señala a la figura con 7 cuadrados]
S: Porque hay más de 1.
R: porque, ¿qué?
S: Porque hay más de 1.
R: ¿Más de uno?
S: Y en la ganancia de esta se pone uno, es más de una de 3 pero aquí yo estoy sumando de a 2.
R: Bueno, esta, o sea esta no puede ser la figura 1 [Señala a la figura que tiene 7 cuadros]
Niños: No.
R: ¿Tiene que ser esta?

Niños: Sí.
R: Entonces, ahora voy a colocar otra [el profesor escribe los números 4,9 y 14 de izquierda a derecha].
¿Bien?, entonces quiero que...me digan para ustedes cual es, bueno como lo vamos a llamar, posición o término.
Niños: Término
R: ¿Cuál es el término 1?
[Los niños señalan al número 4]
Niños: Éste.
R: ¿Y por qué no éste? [El profesor señala al número 14]
Niños: Porque este [señalan al número 4] es menor que este [señalan al número 14]
R: Muy bien, muy bien, porque éste [señala al número 14] ¿es mayor que éste?
[Señala al número 4]
Niños: Sí.
R: Bueno yo les, yo les voy a colocar, bueno, entonces, entonces por ejemplo, si yo les preguntara si yo les preguntara, cuál es el término, miren que aquí [señala a los cuadrados] no aparecen ni figuras ni términos, que ustedes han establecido, si yo les preguntara, cuál es el término....cuál es el número que corresponde al término 10, ¿cómo lo hacen?
[Los niños se detienen a pensar].
R: ¿Cómo lo harían?
E: El 10 lo multiplico por 3.
R: ¿El 10 lo multiplicas por 3?
[El niño 1 asiente con la cabeza]
R: ¿Y por qué?
E: Porque acá...los términos se van sumando de a 3.
R: ¿Aquí y acá los términos se les suman 3? [el profesor señala al número 4 y al 14]
Niña: Sí.
R: ¿Seguro?, ¿a cada término se le suma 3?
S: Pues que se le suman 2 allá.
Su: No se le está sumando, de acá [señala al 9] a acá [señala al 14] se le está sumando
R: Y ¿cuánto se le suma Sunner?
Su: [cuenta con los dedos] cinco, cada uno se va sumando 5.
R: Cada uno se va sumando 5, entonces si yo quiero saber cuál es el termino 10, como lo haces, explícame con palabras cómo lo haces.
Su: Se multiplica por 10, el 5 se multiplica por 10.
S: El 10, el 10 se multiplica por 5.
R: El 10 se multiplica por 5.
S: Ujum.
R: Bueno, entonces, entonces, volvamos a ver una cosa, ustedes dicen que el término 1 tiene que ser ¿el qué?
[Los niños señalan con el dedo al número 4].

R: ¿Y la razón que me dieron fue qué?
[Los niños piensan un momento]
R: Todos me dieron una razón, fue que el número es más que.
Niños: Más pequeño que éste [señalan al número 14].
R: Bueno, entonces yo les voy a colocar, otra secuencia, de números, esta, esta, esta, esta.
[Escribe los números 35, 33 y 31 de izquierda a derecha].
R: Ahora quiero que me digan para ustedes cuál es el término 1.
Niños: Este [Los niños señalan al número 31].
R: ¿Ese es el término uno?, y el término 2.
Niños: Este [Los niños señalan al número 33].
R: Y el término 3.
Niños: Este [Los niños señalan al número 35].
R: ¿Sí?, y cuál es el término 80.
[Los niños se ríen y dejan de señalar la hoja].
R: ¿Hasta dónde lo buscan?
E: Este, este, este, este, este, este (…) [Señala en la hoja de derecha a izquierda]
R: Hacia donde, ¿hacia allá?
Niños: Hacia allá, [Todos señalan de derecha a izquierda].
R: Bueno, entonces miren, vamos a trabajar el martes, el martes (...).
Fin de las sesiones 7, 8.

Sesiones 9, 10 y 11

0.01s – 0.14s.
Se hace un paneo del escenario hay dos mesas redondas, en la primera mesa están sentados 6 niños y en la segunda mesa están sentadas 7 niñas, [la profesora escribe en el tablero].
0.14s – 0.52s
Profesor Rodolfo
"sesión número nueve 9, 16 de Mayo de 2012, la profesora va hacer una re-contextualización acerca de la tarea del instrumento 2, va hacer una re-contextualización de las producciones de ella y a continuación la profesora va a trabajar con ellos, el instrumento número cuatro (4), que habla del Problema del Mensaje.
[Mientras el profesor hace la introducción, la profesora habla.]
0.14 – 0.28
Profesora: Bien, Muy buenos días chicos.
Estudiantes: Buenos días.
Profesora: uyy! pero esa energía, Buenos días otra vez.
Estudiantes: ¡Buenos días!
Profesora: listo chicos, entonces [las manos de la profesora están en la cintura), bien ehh vamos a empezar. Listo

Entonces necesito que por favor los niños que están dando la espalda se giren [la profesora ayuda a la estudiante más próxima a ella para que se gire] para que puedan ver al tablero. Listo

Todos alcanzan a ver bien? … cierto que sí?

Hazte acá [le dice a la estudiante y le señala un lado de la mesa] a este lado. Entonces

0.53

Profesora: Listo chicos vamos hacer un recuento. . .

0.54

[Hay un corte en el video, se retoma, y la cámara cambia de posición de tal manera que se pueda ver el tablero].

0.55

Profesora: esta secuencia con circulitos que era diferente era como un T [la profesora señala el tablero]

Cierto. Tuvimos trabajando con esta secuencia también de círculos, luego, empezamos a trabajar con secuencia de números, entonces, yo les decía a ustedes que las de circulitos son secuencias figurales, listo.

1:11

Entonces, hoy vamos a trabajar de nuevo con esta secuencia de acá [la cámara está haciendo un paneo a los estudiantes], la vamos a retomar, entonces vamos a mirar qué características tiene esa secuencia. Listo.

1:20

Entonces primero ya sabemos que es figura A pues porque tengo un figura acá (señala el tablero) figura 1, figura 2, figura 3, con la secuencia numérica teníamos era qué?.. Términos... Se acuerdan?

0 0	0 0 0	0 0 0 0
0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0 0
Fig 1	fig 2	fig 3

1:35

[Los niños afirman con el movimiento de la cabeza]

Término 1, término 2, término 3, aquí simplemente llamamos, figura 1, figura 2, figura 3, siempre quiere decir características

0 0	0 0 0	0 0 0 0
0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0 0
Fig 1	fig 2	fig 3

[Hay un corte en el video 1:44 m]

1:46

Profesora: cuantos círculos abajo….

Estudiantes 10

Profesora: diez y cuantos círculos acá arriba?
Estudiante: 9, 10
E. Luis: 11
Profesora: nueve, pero por qué?
1:53
Estudiante: no profe.
Profesora: no, miren Luis dice que no, entonces no por qué entonces.
E. Luis: yo digo que se ponen 12 abajo y 11 arriba. (Luis tiene las manos hacia atrás, e inclinando la silla en el mismo sentido)
(El compañero de al lado lo ratifica con una seña con la cabeza)
E. dos: exacto
Profesora: estoy calculando la figura número diez. Y Luis dice que coloque acá cuantos círculos?
Luis: 12
Profesora: doce y acá arriba cuantos?
Luis y el compañero: 11
Profesora: once (...) ¿por qué?
2:11
Luis: [todos los compañeros voltean a mirarlo] (con voz de indeciso, dice por qué….) [su acento provoca risas] (Luis se balancea en su silla y finalmente dice)
2:22
E Luis: Hay profe, lo explico en el tablero.
Profesora: No, vamos a mirar, volvamos a mirar despacio, miren, no importa, mírenosla bien. Entonces.
[Luis pasa al tablero, dibuja 10 bolitas en la parte de abajo y 10 bolitas en la parte de arriba y por último le agrega una torre de 3 bolitas una arriba y las otras dos abajo]
Luis: [al agregar las últimas bolitas dice]: y como siempre le voy agregar una torre.
Profesora: y como siempre le voy a sumar una torre dice Luis. ¿Cuál es la torre?
[Luis encierra en un círculo la torre con tres bolitas, una arriba y dos abajo]

2:56
Profesora: Listo, ah muy bien, entonces miren, miren esto entonces mientras Jennifer nos decía que hiciéramos acá 10 en la fila de abajo 10 círculos y en la de arriba nueve, listo, Luis nos dice, no tiene que ser así, pero miremos por qué?
Miren, entonces, la pregunta para Luis bueno para todos ustedes es: ¿Por qué tengo que dibujar 10 círculos?....... Por qué estoy hablando de la figura 10.
3:26
Entonces vamos a recordar rápidamente, miren, si tengo la figura uno vamos a tomar el método de Luis. Listo, con la torre.
3:33

Entonces vamos a tener presente la torre, miren la figura uno quiere decir que pinto un círculo vuelvo y pinto otro círculo y le sumo la torre, entonces voy a pintar la torre. Esta es la torre. [La profesora resalta los tres últimos círculos formando una torre un círculo de la fila de arriba y dos de la fila de abajo]. Ahora en la figura número dos, voy a pintar cuantos símbolos arriba?
3:53
Estudiantes: dos.
Profesora: dos, entonces estos dos, voy a rayar estos dos, y abajo cuantos pinto?
Estudiantes: dos
Profesora: otra vez dos y le sumo que cosa?
Estudiantes: la torre
Profesora: la torre,
4:08
Profesora: Acá, figura 3. Entonces, ¿cuántos círculos dibujo arriba?
Estudiantes: Tres
Profesora: Yaneth ¿cuántos?
Yaneth: Tres
Profesora: tres. Uno, dos y tres. Abajo?
Estudiantes: Tres
4:24
Profesora: Son tres y la torre, listo. Entonces la figura número diez, vamos a ver si es cierto lo que dice Luis, mire lo que ha pasado con las otras figuras. Figura uno, pinto un círculo otra vez otro mismo circulo y la torre.
4:40
Figura dos: dos círculos, otra vez otros dos círculos y la torre, figura tres, tres círculos arriba, tres círculos abajo y otra vez la torre. Entonces figura diez cuantos círculos tiene?
Estudiantes: diez
Profesora: diez arriba, diez abajo, y la torre. Estamos todos de acuerdo.
Estudiantes: si
5:00
Profesora: Bien, listo, ahora. Nosotros también hicimos otro tipo de ejercicio, entonces el ejercicio era escribirle a uno de los estudiantes que no habían venido, que creo que esa vez fue Santiago. Cierto
Estudiantes: Sí
Profesora: Escribirle a Santiago un mensaje con el cual el pudiera calcular el número de círculos que tiene una figura en especial. Entonces esa vez, había un número grandísimo, que no recuerdo el numero grandísimo, pero vamos a suponer un numero cualquiera. Un número cualquiera, listo.
Digamos que era ese 8.272 muy grande [la profesora escribe en el tablero el número8872] , muy grande. Listo, entonces esa vez el número que les daba, vamos a suponer que es este,

ustedes tenían que escribirle un mensaje que dijera: Santiago para poder calcular el número de círculo que tiene la figura numero 8.272 entonces que debes hacer.
5:57
Profesora: quien me recuerda lo que hicieron
E Luis: yo
Profesora: Luis que dijiste,
E. Luis: yo le dije a Santiago, [Santiago, sostiene lápices en la mano y juega con ellos mientras habla]que…
Profesora: más durito, porque no te escucho
06:06
E. Luis: lo que yo escribí ese día [reclinando la silla hacia atrás y con algo de pena dice] fue que al 8272 le sumo otra vez 8272 [señala con la mano el tablero, tratando de reforzar lo que dice] y le sumo 3 más que es la torre. [Voltea la cabeza, haciendo un gesto de "Fácil"]
06:17
Profesora: bien, entonces miren el mensaje, ese era el mensaje para Santiago, entonces, Santiago toma 8.272, - porque yo quiero calcular es el número de círculos, no voy hacer la figura porque imagínense como sería una figura de esas.
06:29
Entonces dice Luis, tomo el número 8272 le sumo otra vez 8272 y vuelvo y le sumo que. [la profesora señala en el tablero las torres] las torres es decir 3.
06:41
[hay un corte en el video, la profesora aparece con una hoja en las manos]
Profesor Rodolfo: va leer el mensaje que respondió.
06:43
Profesora: entonces para Santiago:… [La profesora lee un poco en voz baja y dice:] a bueno lo que pasa es que esa vez en el mensaje debían calcular cuántos círculos había en la figura mil. Listo.
06:53
Entonces, el mensaje de Adriana es: la figura numero mil, lo multiplico por dos y más 3 y el resultado es ese, es decir es el número de círculos.
07:04
Entonces que está diciendo Adriana. Como yo tenía que calcular en el mensaje, cuantos círculos iba a ver en la figura mil, entonces miren, vamos a devolvernos un poquito ahora si con este ejemplo.
07:16
Miren si fuera la figura mil como sería el mensaje de Luis? Santiago toma mil súmale otros mil y luego súmale tres, ahora con el mensaje de Adriana, Adriana está diciendo mil lo multiplico por dos y más tres.
07:33

Entonces lo que le está diciendo Adriana a Santiago: toma el mil de acá de la figura [la profesora en el tablero redondea con el marcador sin escribir el numero 1.000] multiplícalo por dos y súmale tres.
[Hay un corte en el video 07:43] [la cámara aparece enfocando a una estudiante]
07:46
Profesora: Repítelo, listo. Ay ¡perdón. [la estudiante ríe] otra vez, entonces miren, si fuera la figura dos mil como escribiríamos el mensaje de Adriana
E. Jenny: coja el número dos mil.
Profesora: aja
07:54
E. Jenny: lo multiplica por dos y le suma tres [mientras dice la frase ella con su mano extiende dos dedos, a la vez que dice que lo multiplica por dos, y luego extiende 3 dedos y dice le suma tres]
Profesora: Muy bien, allá en esa mesa están de acuerdo con eso.
[Hay un corte del video 08:00]
Profesora: … como queda el mensaje de Adriana, pero entonces otra persona de allá de esa mesa, cómo quedaría el mensaje de Adriana, Héctor sí.
Toma…
8:09
E. Héctor: el millos [Héctor se levanta de la silla por un momento y se vuelve a sentar] y lo multiplicas por dos…
Profesora: y...
E. Héctor: y después le suma tres. [El compañero que está al lado de Héctor, afirma lo que él está diciendo con la mano].
08:018
Profesora: todos estamos de acuerdo.
Estudiantes: afirman con la cabeza.
[Hay un corte del video 08:18]
08:20
Profesora: Vamos hacer algo diferente a lo que hemos hecho las clase anteriores. Listo, entonces necesito que me presten atención, Luis y Héctor, aquí. Listo.
08:30
Entonces, bien, miren lo que vamos hacer, en esta bolsa yo tengo varias tarjeticas de cartulina, tengo varias tarjeticas hechas de cartulina ¿listo?
08:41
Entonces cada una de esas tarjeticas ustedes no pueden ver pero que están aquí miren. [la profesora muestra la bolsa con las tarjetas], que están aquí en la bolsa tiene un número. Listo. Entonces concentraditos aquí en lo que vamos a hacer.
08:53
Yo voy a coger una de estas tarjetas al azar, ¿qué significa al azar?, meto la mano revuelvo y…

Estudiante: la que salga.
Profesora: y la que salga, listo, la que salga. Entonces miren, yo voy a sacar la tarjeta, pero ¿cuál es el chiste?
09:07
Ustedes no pueden mirar el número, solamente yo lo voy a conocer, yo saco la tarjeta miro el número y voy hacer lo siguiente [la profesora se desplaza y coge un sobre] voy a tomar este sobre, para que yo les haga trampa y ustedes me hacen trampa.
09:21
Tomo el sobre, meto la tarjeta con ese número, listo, ¿qué vamos hacer con ese sobre?, el sobre se lo vamos hacer llegar a la profesora Estella. Todos conocen a la profe Estella?
Estudiantes: Sí!
Profesora: la profe Estella, la profe de cuarto, sí, la directora de grupo del cuatrocientos qué?
Estudiante: cuatrocientos uno listo.
09:40
Entonces miren, porque es que esta es una prueba grandísima, entonces de esto depende.
[Hay un corte de video 09:44]
09:45
Profesora: Entonces miren las tarjetas, les voy a mostrar el lado donde no está el número, porque el número está escrito al respaldo, ¿listo?.
09:52
Yo aquí estoy mirando el número, ustedes no lo pueden ver. Esa es la gracia. Listo.
Estudiantes: Ah.
Profesora: entonces yo voy a tomar la tarjeta, pero la voy a meter acá porque todavía no la voy a sacar, listo.
09:59
Porque tiene que ser a la zar. Entonces miren lo que voy a hacer, yo voy a tomar la tarjeta, la voy a meter en el sobre sin que ustedes puedan ver el número y la idea es que ustedes tiene que escribirle un mensaje a la profe Estella, donde ustedes le digan a la profe.
10:16
¿Cómo calcular el número de círculos que corresponde a la figura… al numerito que está acá? [la profesora levanta el sobre indicando que ahí está la tarjeta], es decir miren, el número que voy a meter acá corresponde al número de una de las figuras de la secuencia. Listo.
10:027
Es decir todas las tarjetas que yo tengo marcadas acá tienen un número, ese número corresponde a una figura de esta secuencia, ¿sí?, entonces lo que yo quiero.
10:38
Es que la profe Estella, cuando lea el mensaje de ustedes, sea capaz de calcular el número de círculos que corresponde a la figura que está aquí en la tarjeta al número de la figura que está aquí en la tarjeta, ¿listo?

[Hay un corte del video 10:53]
[Los estudiantes están distribuidos en todo el salón, para hacer el trabajo individual]
Profesora: … se me acabaron los sobres (…) coge.
E. Luis. Profe
Profesora: Señor.
E. Luis: para hacer una pregunta.
Profesora: Sí, ¿qué pregunta tienes?
11:02
E. Luis: Como se escribe, como vamos hacer para explicar si no sabemos el número que está dentro. [Luis señala el sobre que tiene en la mano].
Profesora: Uy esa es una buena pregunta, miren, Luis me dice: profe pero yo cómo hago para saber cómo decirle a la profe, si no conozco el número.
11:14
Pues entonces vamos a devolvernos acá, listo. [la profesora se dirige al tablero].
Profesora: Aquí, miren esto (…) claro yo les digo a ustedes que es la figura número veinte, o sea si la tarjeta que yo meto acá [Señala la bolsa] puede ser la figura veinte, entonces ustedes ¿qué le dirían a la profe Estella?
11:35
E. Luis: al veinte le sumo otros veinte y luego le sumo los tres.
Profesora: Ah muy bien, al veinte le sumo veinte…
11:41
E. Jenny: O el veinte lo multiplica por dos y le suma tres.
Profesora: Perfecto tenemos los dos mensajes, vamos hacer una cosa, listo, tenemos esos dos mensajes.
11:46
Vamos hacer una cosa, listo, tenemos esos dos mensajes, ósea podemos utilizar o como el mensaje de Luis o como, ósea, la forma de Luis o como la forma de.. Tú eres … Jenny, de Jenny , listo.
11:57
Entonces, niños acá, importante esto, pero es que ustedes no van el número que yo estoy colocando en el sobre a la profe…
Profesora Johana: Vamos a leer lo que dice la hojita que ustedes tienen ahí. La profesora Johana tiene una bolsa y dentro de ella introduce varias tarjetas, cada una con un número. Cada uno de los números que están en esta bolsa corresponde a una de las figuras de la secuencia que ustedes tiene acá, ¡Listo!, hasta ahí, ¿todo bien?
En la bolsa tengo unas tarjetas con un número y el número es el número de la figura, es decir, el número que está aquí, ¿listo? Ahora continúo: Dice ella saca al azar una tarjeta y la introduce en un sobre, asegurándose de que ningún estudiante haya visto el número de la tarjeta, entonces vamos a hacer eso. Ustedes no pueden ver las tarjetas entonces lo que yo voy a hacer es a revolver y la voy a sacar en esto [Enseña el sobre donde introducirá la tarjeta extraída de la bolsa], no es el de ustedes, sino éste [de nuevo enseña el sobre].

Acá tengo unas tarjetas, las revuelvo [realiza la acción de revolver las tarjetas dentro de la bolsa] voy a mostrarles el lado que no tiene el número [saca la tarjeta y la enseña por el lado que no tiene el número] ¡Listo! Acá está la tarjeta, estoy mirando el numerito, ustedes no lo pueden ver, y entonces lo introduzco aquí [introduce la tarjeta extraída de la bolsa en un sobre preparado previamente]. ¡Listo! Éste es el sobre para la profe Stella, ahora, cual es la misión de ustedes, en ésta hojita que no la van a doblar, (hoja entregada al inicio de la actividad), que después miramos como metemos el mensaje en el sobre, entonces quiero que escriban un mensaje para la profe Stella, el mensaje qué debe indicar: El mensaje debe decirle a la profe como puede ella calcular rápidamente el número de círculos correspondientes a ésta figura que tengo acá [señala el sobre que contiene en su interior la tarjeta extraída de la bolsa en momentos previos], ¿listo? Eso es todo, cada uno escribe un mensaje, ustedes tienen que ingeniarse una manera de que la profe lea el mensaje de Héctor y diga "ah (…) ya sé cómo calcular el número de círculos correspondientes al número de círculos que está aquí en la tarjeta [señala nuevamente el sobre que contiene la tarjeta extraída anteriormente de la bolsa].
Una de las niñas de la clase dice: Pero, tengo que saber el número.
Profesora Johana: Tienes que escribir un mensaje, ¿cómo le escribirías un mensaje?, mira: lo que yo colocaría, que la profe saque la tarjeta y diga: ah ya sé cómo calcular el número de círculos correspondientes al número al número que aparece en la tarjeta.
Profe Rodolfo: Eso tiene que hacerlo solitos, con el número que no sabes. [Niños empiezan a escribir la carta]

Entrevista Focal #7- 16 de Mayo de 2012. Sesión #9

Profe Rodolfo: Dígame alguno cuál era como la dificultad, que era lo que no entendían o cuál fue como realmente el problema para poder escribir el mensaje. Por ejemplo Jennifer.
Jennifer: La dificultad era no saber el número en la figura, porque uno cómo iba a hacer el mensaje sin saber el número de la figura [señala una hoja en donde están dibujados algunas de las secuencias figurales de la actividad]
Profe Rodolfo: ¿Tú quieres agregar algo Jimmy?
Jimmy: Lo mismo que ella.
Profe Rodolfo: ¿Quién tiene algo distinto? ¿Ese era como el problema, como la dificultad? [La mayoría de los niños asienten con la cabeza].
Y aún esa dificultad, que no sabían cuál era el número, porque el número era un número desconocido, un número…
Jimmy: Cualquiera
Profe Rodolfo: ¿Cómo?
Jimmy: Cualquiera.
Profe Rodolfo: No te escucho.
Jimmy: Cualquiera.

Profe Rodolfo: Cualquiera, era un número (…) ¿Tú qué entiendes por un número cualquiera? [Señala a Jimmy]
Jimmy: Por ejemplo, es cualquier número [mueve las manos y las refriega ente sí]
Profe Rodolfo: Cualquier número, pero el problema es que ustedes no lo sabían porque era oculto. Johana siempre, la profesora Johana les mostraba la tarjeta pero ella podía ver el número, pero en la parte de acá no lo veían, entonces tenían ese problema de no saber cuál era el número, entonces eso, mejor dicho, a qué los obligó, por ejemplo, en la respuesta de Yaneth, por ejemplo, lee tu respuesta en voz alta [le entrega la hoja con la respuesta a Yaneth]
Yaneth: Profe Estella, para [se enreda al leer, saca la lengua y mueve la cabeza hacia los lados] calcular el número de la tarjeta tienes que sumar el número que te salga en la tarjeta dos veces y la suma más tres y ahí sale el número [entrega de nuevo la hoja al profe Rodolfo].
Profe Rodolfo: Claro, entonces como Yaneth no sabía cuál era el número entonces le tocó, porque empezamos a hablar tú y yo y entonces ella decía "pero yo puedo escribir el número 80", tu dijiste, ¿verdad?, el número 80, entonces yo le decía bueno, puede ser 80, puede ser 100, pero tú no lo conoces, entonces le tocó escribir, leyendo lo que ella dijo, el número que le salga en la tarjeta, el número que le salga en la tarjeta, porque no lo conocía. Por ejemplo, en el caso de Astrid, lee tú respuesta hija [le pasa la hoja con la respuesta a Astrid], fuerte.
Astrid: Yo creo que el número que [se queda callada por un momento] que está en la cartulina lo tienes que colocar en la parte de arriba y en la parte de abajo y le sumas tres. [Le entrega la hoja al profe Rodolfo].
Profe Rodolfo: ¡Muy bien! Y en el caso de Santiago, Santiago dijo: "Profe Estella, el número 1000 se le suman 1003" (…) perdón, ¿cómo es Santiago? Profe Estella: El número 1000 se le suma 1000 más 3. ¿Por qué escogiste el número 1000?
Santiago: [Se ríe al dar la respuesta] No sé, porque se me ocurrió.
Profe Rodolfo: El primero que se te ocurrió. [Santiago asiente con la cabeza]. Muy bien
Jimmy: Profe Stella: Para leer el número que está dentro de la tarjeta debe coger ese número y multiplicarlo por 2 y el resultado que te dé debes colocarlo abajo, o sea, abajo y arriba, ejemplo, por ejemplo en la figura #2 multiplicamos por 2 y le colocamos la torre de 3 [Jimmy señala la figura #2 que está en la hoja entregada para la actividad].
Profe Rodolfo: [señala la misma hoja en la parte donde está consignada la respuesta de Jimmy] y aquí hiciste lo mismo, o sea, utilizaste lo de la torre.
Jimmy: [señala la torre dibujada en su respuesta] 2 por 2 [señala la torre en la parte inferior] aquí y le resta y 1. 3 y aquí arriba, [señala la parte superior de la torre]
…
[La profesora realiza la explicación del manejo de la guía]
Profe: ¿cuál consideras tú es el primer término de la secuencia anterior y por qué? entonces en este espacio, el primer espacio [la profe señala en la guía] me van a escribir cuál

consideran ustedes que sea el primer término y me escriben porque listo ¡¡pero todavía no, todavía no!!

En el segundo entonces la pregunta es ¿cuál es el término siguiente, entonces ustedes ahí van a escribir cuál creen ustedes que es el término siguiente al primer término listo. Ahora en este tercero quiero que me presten muchísima atención tercero y cuarto listo… el tercero lo voy a leer la profesora Johana tiene una bolsa y dentro de ella introduce varias tarjetas, entonces ya hicimos ¿eso verdad? Que yo en la bolsa traje varias tarjetas cada una marcada con un número eso también lo hicimos cada uno de estos números corresponde a uno de los términos de la secuencia anterior, ella saca al azar una tarjeta y la introduce en un sobre, recuerden que sacar al azar es simplemente yo hago revuelvo y saco una tarjeta de todas las que tengo hay, asegurándose que ningún estudiante haya visto el número de la tarjeta, la profesora Johana quiere que se escriba un mensaje a la profesora Estella que será introducido en el sobre junto con la tarjeta el cual explique cómo calcular rápidamente el número que corresponda a ese tema (…) entonces miren en el sobre yo ya metí una tarjeta con un número que corresponde a un término de la secuencia de acá ¡listo! Entonces lo que quiero que hagan es que escriban un mensaje de tal forma que cuando la profe abra el sobre y saque la tarjeta con su mensaje pueda calcular el número que corresponde al término que aparece hay en las tarjetas listo entonces ahora sí que vamos a hacer ahora….

[Se corta el video y salta a otra situación]

Profesora: ¿cuál es el primer término de esa secuencia? ¿Cuál? [El alumno señala la hoja el número 5] esta es la secuencia ¿cuál? ¿Ese, y por qué?

N1: porque es el número de la secuencia [susurra en voz baja]

Profesora: más durito ¿porque este es el que?

N1: El (…) estos son los números de la secuencia

Profesora: Entonces ¿por qué este es el primer término?

N1: Este es el primer término de la secuencia

Profesora: ¿Cuál? Señálalo otra vez

N1: Este, el cinco [señalo el numero '5']

Profesora: Listo entonces escribe 5… y ahora [se corta el video y sala a otra situación]

Profesora: Como nos fue, ¿listo? entonces pero vamos a mirar para la pregunta uno y dos listo entonces en la pregunta número uno cuál considera usted que es el primer término de la secuencia anterior, entonces quien me dice que escribió (…) tu si (…) a ver Lorena qué escribiste, para ti cuál es el primer término de la secuencia

Lorena: El cinco.

La profesora: El cinco.

Los niños en su mayoría contestan que el primer término de la secuencia es cinco excepto uno que dice que el primer término de la secuencia es tres otros no dicen nada…

La profesora: ¿Para ti?

Luis: el tres.

La profesora: El tres entonces bueno acá tenemos dos respuestas entonces vamos a escuchar primero a Lorena, ¿Lorena porque es el cinco para ti?

Lorena: [Lorena no responde mira a su compañera].
La profesora: ¿No sabes cuál es el primer término?
Lorena: [Hace una negación con la cabeza].
La profesora: ¿Adriana por qué es el primer número para ti?
Adriana: Porque es el más bajo.
La profesora: Adriana dice que este es [señala el número 5 en el tablero] el primer término porque es el más bajo… ¿el más bajo como así?
Niña de balaca: Más menor…menor
La profesora: Porque es el menor, entonces mira, listo entonces el primer término de la secuencia para Adriana ¿Quién más escribió levanten la manito quien más escribió que el primer término es cinco? [Varios niños levantan la mano] muy bien…. Sunner cuéntanos por qué
Sunner: Porque el cinco es menor que los demás.
La profesora: Porque el cinco es menor que los demás ahora escuchemos a Luis, vamos a ponerle cuidado a la respuesta de Luis listo… Lis ¿por qué dices que es el tres?
Luis: Por ejemplo si 5 es el segundo ¿no? Esta figura ya le da a uno la secuencia ¿no?
La profesora: bueno pero que ven un segundito acá [que se dirija al tablero] voltéate un segundito para que todos te puedan escuchar, miren lo que dice Luis… Luis dice que si el 5 (…) ¿tú dices que el 5 es el segundo término?
Luis: [Asiente con la cabeza].
La profesora: ¿Por qué?
Porque al dos le sumo otros dos y le resto uno y le sumo otra vez dos.
La profesora: y porque dices… y Donde ves tú el dos hay en la secuencia .
Luis: debería ir acá [señala debajo del “5” en el tablero].
La profesora: ¿debería ir acá? debajito [señala la profesora debajo del “5” en el tablero]
Luis: Sí debe ser.
La profesora: Profe tiene un marcadorcito que me preste
Profe Vergel: sí
La profesora: ¿Dónde debe ir el dos?
Luis: Ah aquí [pone el dos debajo del “5”]
La profesora: ¿Y entonces dónde iría el tres?
Luis: Ah aquí [lo pone debajo del “7”].
La profesora: Y entonces en los otros dos que [refiriéndose al 9 y al 11] .
Luis: [Pone el “4” debajo del “9” y el “5” debajo del “11”].
La profesora: Bueno (…) entonces mira la pregunta para Luis y es y para ustedes listo ¿por qué este?… ¿por qué para Luis? (...) bueno (…) ¿por qué para Luis este es el segundo término y no el primero? ¿Entonces dónde estaría el primero?
Luis: [Luis pone el “3” antes del “5”].
La profesora: ¿Y seria tres? ¿Y no puede ser este el primero? [Señala el “5”]
Luis: No profe.
La profesora: ¿pero por qué… por qué no? ¿Esneider por qué?

Esneider: No (…) yo no (…).
La profesora: bueno lo que ocurre es que aquí hay una cosa
Santiago: Yo, yo, yo.
La profesora: A ver Santiago cuéntame.
Santiago: El primer término no es ni, no es el, ese es el tercero" 5" es el tercero.
La profesora: ¿Cinco es el tercero? ¿Y entonces cual es el primero?
Santiago: El primer término es "1" hay se van sumando de a "2" al "1" se le suman "2" da "3" se le vuelven a sumar "2" da "5" el primer término es "1".
La profesora: Bueno miren acá lo que estamos diciendo, listo [ella está en el tablero] lo que ocurre es lo siguiente, entonces miren y te puedes sentar [le dice a Luis] esta es la secuencia que yo les di "5…7…9…11" listo voy a borrar estos numeritos [borra lo que puso Luis] esta es la secuencia que yo les di "5…7…9…11" [señalando al tablero] la secuencia de la que está hablando Luis es "3…5…7…9" [la anota en el tablero] y la secuencia de la que está hablando Santiago "1…3…5…7" [la anota en el tablero] que pasa con estas secuencias miren si ustedes miran esas secuencias, por ejemplo para obtener el "7" yo podría construir el "7" a partir del "5"[señala el "7" en el tablero] ¿haciendo qué?
Los alumnos: ¡Sumándoles dos!
La profesora: Puedo construir el "9" a partir del "7".
Los alumnos: Sumando dos [contestan en coro pero Santiago contesta siempre pendiente]
En esta secuencia [señala la secuencia de Luis] puedo construir el "5" a partir del "3".
Los alumnos: sumando dos [nuevamente Santiago de primero].
La profesora: Y el "7" a partir del "5" listo y miren en esta tercera secuencia pasa lo mismo[señalando la de Santiago], entonces las tres secuencias se pueden construir sumando dos verdad, pero tienen una diferencia y es el primer término entonces miren… el primer término de esta secuencia [señala la secuencia de Santiago] para Santiago es el "1", el primer término de esta secuencia [señala la secuencia de Luis] para Luis es el "3" y el primer término de esta secuencia [señala la secuencia original que estaba en la guía] para ustedes es el "5"listo entonces ….[el video se corta y avanza a otra parte].
La profesora: primer término miren (…) la primera pregunta estaba preguntando por el primer término en la segunda cual es el término siguiente ¿Qué contestaste hay?
Alumnos: varios alumnos contestan "7".
La profesora: Quién más contestó "7" y quién no contestó "7".
Santiago y Luis: [Los dos levantaron la mano].
La profesora: Santiago y Luis, ¿porque no es "7"?
Santiago: Porque es el último de la secuencia (…) o el segundo después del "5" en la secuencia yo contesté "13".
La profesora: Ah bien, miren lo que dice Santiago, Santiago contesto "13" por qué él pensó que la pregunta hacía referencia al siguiente en la secuencia.
Luis: yo respondí (…).
La profesora: Respondiste qué.
Luis: "5"

La profesora: “5” el siguiente ah claro porque él estaba pensando que el primer término era el tres. Entonces miren: La respuesta de Luis está bien, pero pensando en esta secuencia de acá, ¿listo? [señala con el marcador en el tablero la segunda fila donde están escritos los números 3, 5, 7, 9] entonces la secuencia tuya está bien, pero entonces estamos hablando es de ésta [señala con el marcador en el tablero la fila superior, tiene los número 5, 7, 9, 11]. Vamos a hacer un acuerdo, esa segunda pregunta, la estaba haciendo, o sea, yo estaba preguntando cuál es el término siguiente, ¿Quién es el siguiente término al primer término?, después del primer término, ¿quién sigue?

Alumnos: El 7.

Profesora Johana: El 7 y ese sería el segundo término, ¿listo?, ¿de acuerdo con eso?, listo. Bien, ahora con la tercera, en la tercera aún no han terminado de escribir, ¿listo?, pero creo que aclarando las dos primeras, los estudiantes que no han terminado de escribir la tercera la pueden seguir escribiendo, ¿sí?

Voy a meter en el sobre de la profe Stella, en ese sobre vamos a introducir un mensaje, ¿listo? [Revuelve los mensajes que están dentro de una bolsa] acá no voy a mirar tampoco para no hacerles trampa, voy a escoger la tarjeta, EEsneider, ¿me tienes aquí? [le entrega un sobre a Esneider] listo, ya préstame el sobre, ¿listo?, bien, entonces: ustedes solamente ven esto [enseña la tarjeta extraída por el reverso], yo puedo mirar el número, ustedes no me hacen trampa. El número que estoy mirando acá es el número de la secuencia, entonces, ahora sí, ya, ¿listo? Acabo de meter en éste sobre una tarjeta con un número que corresponde a un número de la secuencia, y ustedes debe escribirle a la profe un mensaje, de la forma que cuando la profe saque la tarjeta pueda calcular qué, el término al que corresponde ese número que yo acabé de meter acá, ¿listo?, entonces, es diferente al ejercicio número 3, porque en él tres yo estaba metiendo en el sobre el número del término y ustedes le decían a la profe como calcular el número de la secuencia, ¿listo?, entonces vamos a ver cómo nos va con éste ejercicio.

Profe Rodolfo: Bueno, como es la cosa. Dice Luis, por qué no repites, Luis, lo que habías dicho.

Luis Felipe: Qué por ejemplo en el 7 se multiplica, el dos multiplicado por el tres, y le sumo 1, pero acá en el término tres no sirve, porque el tres lo multiplico por tres y le sumo 1 daría 10, pero entonces no serviría [señala en el cuaderno la segunda y la tercera posición de la secuencia que se presenta allí]

Profe Rodolfo: No serviría ni para el término 1, ni para el término 3 ni para el término 4. Qué es lo que tú sugieres Santiago.

Santiago: Que se le sumen, se le suman tres, se le pone 1 al término y los otros dos se le ponen la número [señala la palabra Término 1, que está escrita en la parte inferior del número 5, y luego señala el número 5 que está escrito en la parte superior.] y ahí va dando todos.

Profe Rodolfo: ¿Qué, qué, qué es lo que se le pone al término?

Santiago: Al término se le va poniendo 1, de a uno, y a los números se le van poniendo los otros dos.

Profe Rodolfo: Pero, pero tú tienes que producir son los números, tú tienes que trabajar es con los términos pero (…)

Santiago: Pero como usted dice que tiene que dar con éste y con éste [señala los dos primeros números ubicados en la parte superior 5 y 7] tendría que sumársele 3 y al término dársele 1 y al resto a lo, a los otros números.

Profe Rodolfo: Tú qué opinas Luis.

Luis Felipe: Digo que no, digo que no porque también puede hacerse de ésta otra forma, por ejemplo, si es el término 1, el término me puede servir para más varias [señala con el esfero la fila superior de la secuencia plasmada en el cuaderno, e intenta escribir en la mesa] todos los números, con 1 con (…)

Luis Felipe: Con 1, por ejemplo… [Señala la mesa con el esfero y busca una hoja en el cuaderno].

Profe Vergel: Hazlo ahí, tranquilo.

LF: [Acomoda el cuaderno y empieza a escribir] Por ejemplo el 1 da igual a 5 [escribe '1=5'] ¿no? Y entonces el 10 [escribe '10='], como acá al 1 se le suma un cero [señala el '10' que escribió antes] acá pongo el 5 y también se le suma un cero [escribe '50']. Entonces sería el 100, pongo el 5 y le sumo otra vez dos ceros [escribe '100=500', señala el '100'] porque acá se le suman también dos. Y al termino 2 pasa lo mismo. Por ejemplo, el termino 2 es el 7, igual a 7 [escribe '2=7'] ¿no? El termino 20 sería igual a 70 [escribe '20=70'] porque este cero también lo pongo acá [señala el cero del '20', luego el del '70']. Termino 200 sería igual a 700 [escribe '200=700'].

PV:¿Y de dónde sacas eso tú?

LF: De todas las figuras hasta la tres. La 3 igual a 9 [escribe '3=9'], 30 igual 90 [escribe '30=90'], 300 igual a… nueve cero cero [escribe '300=900']. Digamos, la cuatro.

PV: Por ejemplo, cómo calculas el término… el número que corresponde al término tres con esa manera como estas procediendo Luis.

LF: (…).

PV: Por ejemplo aquí en la secuencia, pruébalo con termino uno, termino dos, termino tres y termino cuatro, a ver si te funciona.

LF: Con el termino cuatro también. 4 es igual a 11 [escribe '4=11']. Entonces seria 40 es igual a 110 [escribe '40=110'] porque se le va sumando el cero. 400 sería igual a 1100 [escribe '400 1.100', señalando el punto de mil], y es así, sucesivamente.

PV: Pero yo no entiendo como haces tú, que 40 es igual a 110. ¿Qué quiere decir? ¿Qué el termino 40, que para el termino 40 el número es 110?

LF: Sí (…) porque (…) por ejemplo acá abajo [señala '40=110'], acá tengo el 40 ¿no? [Sobrescribe el '40'], acá antes tenía el 4 [señala el '4'] y le sume el 0, entonces acá, como antes tenía un 11 [señala el '11'], pongo el 11 acá [señala el '110'] y le sumo otro 0… le sumo el cero que es (¿del cuatro?)

PV: ¿Ustedes que dicen? ¿Tienen otra forma? o ¿qué dices tú, Jennifer? [Jennifer se tapa la cara].

Segundo video. Viernes 18 de mayo de 2012, sesión 11

PV: Los niños van a comenzar a trabajar el instrumento número 6, secuencias puramente figurales.
[En el tablero está representada por medio de cuadrados la secuencia de números impares 3, 5 y 7]
Profesora: ¡Listo, bien! Muy buenos días niños. Bueno, vamos a hacer una cosa ¿listo?, vamos a recoger las piezas que tienen aquí los niños de cuarto y [a los niños de la primera mesa ¿los de cuarto?] nosotros después continuamos haciendo esto [recoge unas piezas de papel].
…
P: Les cuento, bien. Resulta que ayer nosotros tuvimos un trabajo que, por cierto, fue bastante pesado; estábamos trabajando con unas secuencias numéricas,…, entonces hoy vamos a trabajar con una secuencia figural, ¿listo? La clase de hoy les va a ir muchísimo mejor. Bien, tengo de nuevo […]. ¿Qué vamos a hacer con esta secuencia figural? [Señala la secuencia del tablero]. Con esta secuencia figural hoy tenemos un trabajo grande porque vamos a hacer muchas cosas ¿listo? Entones, pues primero la vamos a caracterizar, vamos a tratar de mirar todas las preguntas que yo les voy a hacer en la guía instrumento, al igual que ayer niños, lo vamos a hacer de manera individual ¿listo? He pintado aquí la secuencia [Señala el tablero] para que ustedes más o menos miren que es lo que vamos a trabajar. Es una secuencia de cuadrados. Por si aquí [en el tablero] no sé exactamente que sean cuadrados, pero en la hoja que yo les voy a dar si, ¿listo? Entonces voy a repartir el material ¿listo? Y vamos a empezar a trabajar individualmente. Cada quien va a leer la preguntica…
…
P: ¿Tú la vez más fácil que la de los números?
Niño 2: Claro. Estamos mirándole observaciones, y claro, es más fácil.
P: ¿Sí? ¿Le estás mirando observaciones, características, está más fácil? ¿Con los números yo no puedo mirar características?
N2: Pues eso es un poquito más difícil.
P: ¿Es más difícil ver las características? [El niño 2 asiente con la cabeza]. ¡Ah bueno! Me encanta que les parezca más fácil. Hagámosle.
[El niño 2 escribe en la guía el número de cada termino (1,2,..) de la serie figural]
…
P: ¿Por qué te parece más fácil?
Adriana: … [Timidez]
PV: ¿A Yaneth cómo le parece? ¿Más fácil o más difícil que el anterior?
Yaneth: Me parece más fácil.
PV: ¿Por qué?
Y: Porque en el anterior tocaba… adivinar el número, en vez de… [se pone el lápiz en la boca, piensa en lo que va a decir], no se [sonríe].

PV: ¿Y con esta que es lo que sucede?
Yaneth: (…) No sé (…) Es que todavía no la he (…).
Adriana: Toca mirar cuál es la primera, la segunda, la tercera y la cuarta.
…
[Niños realizando la actividad]
…
PV: Entonces, Jenny no ha resuelto el quinto punto pero tu [Se dirige a Laura Sofía] has trabajado este punto anteriormente. Vas a escuchar a Laura Sofía [Se dirige a Jenny] a ver cómo te lo explica y luego me dices que entendiste. Entonces, si quieres lee el mensaje Laura Sofía, el quinto.
Laura Sofía: La profesora Johanna tiene una bolsa y dentro de ella […] tarjetas con un número. Cada uno de estos números corresponde a una de las figuras de la secuencia anterior. Ella saca al azar una tarjeta y la (introduce dentro de un sobre) asegurándose que ningún estudiante haya visto la tarjeta. Johanna quiere que el sobre sea enviado a la profesora Estella con un mensaje que haya sido introducido en el sobre junto con la tarjeta (…) Este mensaje debe explicar a la profesora Estella como calcular rápidamente el número de rectángulos que corresponden al número de la tarjeta.
PV: ¿Cómo le explicas tú a Jenny? [Laura Sofía acomoda su guía] Porque tú contestaste ahí ¿no? Bueno, dime que contestaste.
Laura Sofía: Por ejemplo en la figura 4, pones cuatro abajo y cuatro arriba [señala la hilera inferior de rectángulos y después la de arriba] mas 1 [señala el ultimo rectángulo de la hilera superior].
Profesor Vergel: ¿Y por ejemplo, como sería la figura 5?
Laura Sofía: Sería 5 abajo [hace una línea imaginaria con el lápiz debajo de la hilera inferior de la cuarta figura] y 6 arriba [hace lo mismo, solo que esta vez en la hilera superior de la misma figura].
Profesor Vergel: [Señala la hilera inferior de la figura 4] Pero tú dices aquí 4, para tí esta es la figura 4 ¿no? [Señalando la última figura, y ella asiente], 4 arriba [señala la hilera de arriba], 4 abajo [señala la hilera de abajo] y ¿dijiste 1? [Señalando el ultimo rectángulo de la hilera de arriba]. ¿Entonces con la figura 5 procedes de la misma manera? ¿o cómo es?
LS: 5 abajo y 5 arriba [mientras señala las hileras] más 1.
Profesor Vergel: ¿Y la figura 6?
LS: 6 abajo y 6 arriba, más 1.
Profesor Vergel: ¿Cómo será, por ejemplo, Jenny, en la figura 15?
Jenny: 15 abajo y 15 arriba [sube la mano ligeramente] y le sumamos 1, serían 15 abajo y 16 arriba.
Profesor Vergel: Ahora, ¿el quinto punto cómo lo resolviste tú Laura Sofía? Ábrelo para que lo vean [Laura abre la guía de trabajo].
Laura Sofía: [Laura lee de su guía] Profe Stella, coges el número que está en la tarjeta y lo sumas por el mismo más 1.

Jenny: Profe, yo tenía una pregunta. Era que si era de esta secuencia [señala la secuencia de la guía de trabajo] o de la anterior que trabajamos.
Profesor Vergel: No, de esta secuencia. [Se dirige a Jenny] ¿Tú tienes otra manera de resolverla?
J: Pues, sí señor
…
J: La figura 1 [la señala con el lápiz] uno le coloca un cuadrado acá arriba [y señala el cuadrado inferior] y como es el siguiente del 1, es el 2, entonces lo ponemos acá arriba [señala la hilara superior de la figura]. El dos [señala estos últimos dos cuadrados], estos dos cuadrados los ponemos acá abajo [señala la hilera inferior de la figura 2] y el siguiente del 2 es 3 [señala la hilera superior de la figura 2] y cogemos así sucesivamente hasta los otros.
PV: Por ejemplo con la figura grande ¿Cómo sería? En el cuarto punto, ¿Qué contestaste?
J: Yo conteste: La profesora Stella tiene que hacer lo mismo que el anterior punto; pone el número de la figura abajo y el número que le sigue lo pone arriba [mientras lee va moviendo el lápiz al ritmo de la lectura]. También se puede así [pone la guía de trabajo en la primera página]: uno, dos, tres, cuatro [señalando en cada término correspondiente la hilera inferior de cuadrados] y arriba también se puede hacer lo mismo: dos, tres, cuatro y cinco [señalando en cada término correspondiente la hilera superior de cuadrados].
PV: [Dirigiéndose a Luis Felipe] ¿Tú tienes alguna forma distinta de ver esta secuencia Luis Felipe?
LF: No, igual que ella [señala a Jenny y se balance en la silla]
PV: ¿Le adicionarías algo distinto?
LF: Le diría a la profesora Estella, “Profe Stella”, le diría que abajo, que la figura… entonces que el número que tiene la figura lo ponga abajo [en la hoja va haciendo señas con sus dedos de lo que sería la hilera inferior de la figura] y luego arriba pone el mismo número de la figura y le sumo 1 [de nuevo con los dedos señala lo que debería ser la hilera superior de la figura, y da un pequeño golpecito con uno de sus dedos cuando suma el uno].
PV: Por ejemplo ¿Qué diferencias ven ustedes tres entre el punto cuatro y el punto cinco? ¿Ven alguna diferencia? Porque aquí en el punto cuatro dice: “Se quiere construir una figura grande”, o sea que tenga bastantes cuadrados o rectángulos, y aquí ustedes no conocen el número de figura. ¿Qué ves tú, Luis?
LF: No, que son iguales, porque, acá [señala la guía con el lápiz]… son iguales, porque acá [señala la guía] me están diciendo “se quiere construir una figura grande” pero no me están diciendo el número de la figura y acá me están diciendo el número, tampoco me están dando el número de la figura.
PV: ¿Tú como lo ves Laura Sofía? ¿Tú ves alguna diferencia?
LS: No
PV: ¿Y tú Jenny?
J: No

Sesión Nº 13
Sesión Nº 14
Entrevistas focalizadas

Septiembre 13 de 2012
Profesor: Sesión número trece, septiembre 13 de 2012
Profesora: Muy buenos días, de nuevo vuelvo y los saludo, allá atrás Jimmy ¡aquí! [La profesora hace un gesto de saludo con su mano]. Escuchen [La profesora hace un gesto con su dedo índice señalando su oído], necesito que hagamos silencio porque hay mucha bulla allá afuera, ¿listo?
Estudiante: [Contesta] ¡Sí!
Profesora: Entonces niños ustedes recuerdan que nosotros veníamos trabajando con unas secuencias, es decir…, listo [La profesora mueve sus manos]. Todo el trabajo que hicimos fue basado en con secuencias figurales, ¿cierto? ¿Ustedes de acuerdan de esta bolsa?
Estudiantes: Sí
Profesora: ¿Qué hicimos con esta bolsa? [Muestra la bolsa]
Sunner: Emm… usted traía unos sobrecitos y nosotros hacíamos un problema para la profesora Estella [Hace una seña con sus manos imitando la escritura]
Profesora: Miren, ¿si alcanzaron a escuchar a Sunner, o no la alcanzaron a escuchar?, miren dice Sunner con esta bolsa yo traía unos sobrecitos y con esos sobrecitos ¿escribimos qué?, un mensaje ¿cierto? ¿Para quién era el mensaje?
Estudiantes: Para la profe Estella
Profesora: Para la profe Estela, pero bueno vamos a recordar muy bien qué fue lo que paso [Busca en la bolsa], entonces miren, efectivamente alguna vez hicimos un ejercicio con unos sobres [Muestra un sobre] y aquí tenemos unas cartulinas, ¿listo?, entonces miren, vamos a ver si todos nos acordamos [Hace una seña enfática moviendo su mano], resulta que la idea era la siguiente, listo, yo cogía uno de estos sobres [Muestra el sobre] que tiene adentro un número y una figura [Señala el sobre], ¿listo?, y la idea era la siguiente: ustedes debían escribir un mensaje a la profe Estella [Señala a los estudiantes con el dedo] de tal forma que cuando la profe hiciera lo siguiente, o sea: sacara el numerito del sobre [Simula sacar un papel del sobre y semana el sobre] ella pudiese calcular el número de círculos que tiene la figura que está aquí [Señala el sobre], ¿listo?, entonces ¡ojo con esto! miren, el sobre no contiene figuras [Hace una seña de negación con la mano] contiene un número [Con su dedo índice indica una cantidad], ¿listo? y lo que ustedes hicieron [Hace una seña con la mano] fue escribir un mensaje de tal forma que la profe Estelita mira el número y puede calcular el número de círculos que le pertenecen a esta figura, ¿eso hicimos?.
Estudiantes: Sí [Contestan al mismo tiempo que la profesora].

Profesora: Sí, ¿cierto? Listo, entonces hoy vamos a hacer otra cosa, ¿bien? Nosotros ya escribimos ese mensaje, hoy vamos a hacer otra cosa diferente, ¿listo?, entonces de los mensajes que todos ustedes escribieron con el profe Rodolfo escogemos un mensaje [Con su dedo índice indica una cantidad], ¿listo?, entonces yo les voy a leer el mensaje ¡y atención! [Señala su oído] yo les leo el mensaje, y nadie, nadie puede decirle a nadie su idea, ¿listo?, yo leo el mensaje y usted tiene que construir las cinco primeras figuras, ¿listo?, de la secuencia; pero miren, hoy no [Mueve sus manos indicando negación] les voy a enseñar la secuencia, fíjense que no está el tablero porque por lo general colocábamos el tablero acá, entonces no vamos a tener la figura, solamente vamos a hacer ese ejercicio, entonces miren lo que hacemos, yo leo el mensaje, ustedes tienen sus hojitas y cada uno individualmente escribe los cinco, lo que usted cree que son los primeros cinco términos de esa secuencia, es decir las cinco primeras figuras, ¿sí?, ¿más o menos? [Hace el gesto con su mano]… bueno, voy a entregarles el material, entonces mmm.

…[Pausa en el vídeo]

Profesora: Bueno, ya quédate así [le habla a una Adriana], entonces vamos a hacer una cosa aquí ustedes dos Yaneth y Adriana, listo, déjame mirar tu trabajo [Le habla a Yaneth], vamos a mirar, este es el trabajo de Adriana, este es el trabajo de Yaneth, entonces Yaneth explícale a Adriana cómo construiste la secuencia y ¿Por qué hiciste esta figura uno, figura dos, figura tres, figura cuatro…? ¿Por qué? [Señala las figuras de la hoja] cuéntale a Adriana ¡cuéntale!, por ejemplo ¿porque la primera tiene uno? [Semana la figura uno] ¿Por qué tiene un circulito?

Yaneth: Porque es la figura uno [Señala con su lápiz la figura uno]

Profesora: Porque es la figura uno, y bueno y ¿este circulito qué tiene que ver con este mensaje de acá? [Señala la figura uno]

Yaneth: Ehh ese circulito, el mensaje que tiene que ver con eso se trata de los círculos [Señala la hoja con un lápiz mientras mira a la hoja y a la profesora].

Profesora: Ajá

Yaneth: Entonces este es un círculo, se trata de esto [Señala la hoja con un lápiz mientras mira a la hoja y a la profesora].

Profesora: Entonces por eso es la relación, ah bueno, pero entonces vamos a mirar [Señala la hoja] entonces mira, tú dices listo, figura uno, ¡figura dos! ¿Por qué hay tres?

Yaneth: porque acá se hacen emm dos figuras, dos círculos y este número se pasa, este círculo se pasa pa' acá [señala la hoja] y se ponen en tres [explica con las manos]

Profesora: Ok y acá, figura tres [Señala la hoja]

Yaneth: Emm acá se ponen tres círculos y estos tres que están acá [Señala la hoja] se ponen encima.

Profesora: Figura cuatro [Señala la hoja].

Yaneth: Ehh acá se ponen cuatro círculos y estos seis se ponen acá encima [Señala la hoja].

Profesora: Figura cinco [Señala la hoja].

Yaneth: Eh acá se ponen cinco, cinco círculos y acá se ponen emm emm [Se ríe].

Profesora: ¿Cuántos?, pues contémoslos ¿Cuántos allí? [Señala la hoja]

Yaneth: [Cuenta con el lápiz].

Profesora: ¿Diez?, listo, bueno, mira, mira Yaneth una cosa, el trabajo de Adriana se parece mucho al tuyo, entonces a ver Adriana [Señala la hoja de Adriana] cuéntale a Yaneth como construiste ¿Por qué la primera figura es un circulo?
Adriana: Porque es el término uno [Señala en la hoja con su índice un poco tímida]
Profesora: Porque es el termino uno, bien, y el dos ¿Por qué tiene tres? [Señala en la hoja]
Adriana: Pone el dos y se lo sumo [Señala en la hoja]
Profesora: ¿Y acá este? [Señala la hoja]
Adriana: Pone el tres y se sumó estos tres acá [Señala en la hoja con su lápiz]
Profesora: ¿Y este? [Señala la hoja]
Adriana: Pone cuatro y se le suma estos acá [Señala en la hoja con su lápiz]
Profesora: Bueno, pero si yo subo este acá [Señala en la hoja] ¿No me faltaría uno?
Adriana: [Empieza a dibujar el circulo faltante en la hoja y se ríe]
Profesora: Ah ya ¿y este?
Adriana: Ehh pone cinco y le pone estos acá [Señala en la hoja con su lápiz]
Profesora: Bueno, entonces miren, ya me dieron su explicación pero entonces recuerden que el ejercicio era que esta, o sea vamos a hacer lo siguiente, o sea la idea era que si a la profe Estelita le salía el número uno entonces ella construye esta figura, [señala la figura uno en cada hoja] pero vamos a mirar con lo que dice el mensaje, entonces dice, digamos dice, la profe Estela, voy a leerlo acá [toma la hoja y comienza a leer señalando las partes de las que va hablando], para saber el número de círculos… tú debes coger el número que está en el sobre. Digamos que a la profe Estela le salió el número uno. [Señala en una hoja el círculo que corresponde a la figura uno]. ¿Sí? Entonces, dice acá: Coja el número que está en el sobre y sumarle el mismo número [Señala en la hoja la instrucción]. Entonces, ¿cuánto le tengo que sumar?
Adriana: Uno.
Profesora: ¿Uno? O sea, a la profe Estela se salió el uno. [Señala en la hoja] ¿Y le sumo el mismo número? Entonces, ¿Cuánto le tengo que sumar?, Uno. Entonces, ¿cuántas van?
Adriana y Yaneth: Dos [Yaneth señala en la hoja con su lápiz]
Profesora: Muy bien, dos. Y al resultado que te dio, o sea, 2, le sumas uno, entonces ¿cuánto da?
Adriana y Yaneth: Tres.
Profesora: Entonces, ¿Cuántos tenía que tener la primera figura?
Adriana y Yaneth: Tres.
Profesora: Tres círculos [Abre los ojos] Ah! Quiere decir que entonces, claro, o sea, esta es una secuencia pero no corresponde al mensaje que le dimos a la profe Estelita [Señala la instrucción en la hoja]. Listo.
…[Pausa en el vídeo]

Profesora: Listo, bien, Entonces… Si lo ponemos así todos vemos, sí ¿cierto? [Gira las hojas] ¿Tú sí alcanzas a ver así?
Jenny: Sí, sí, sí.

Profesora: ¿Te corres? Ah, listo. Bueno, Entonces, ésta es la producción de Luis, ésta es la producción de Jenny [Señala cada una de las hojas] listo. Luis, entonces, quiero que por favor le expliques a Jenny [señala a Jenny] cómo construiste éstas figuras [Señala cada una de las figuras en la hoja] y por qué. Por ejemplo, la figura uno tiene tres círculos, ¿por qué?, ¿por qué pusiste tres?
Luis Felipe: Pues, ahí dice que [señala la hoja] al número de acá por ejemplo, acá en el uno (…) Y le sumas uno y el resultado para el número corresponde al número de círculos de esa figura
Profesora: Ah bien, entonces, por ejemplo, digamos que a la profe Estelita le salió el uno, entonces ¿ella qué tenía que hacer? ¿Sumarle cuánto?
Luis Felipe: Sumarle uno más uno, más uno.
Profesora: Entonces, uno más uno, o sea uno más uno, dos, más uno de acá, tres. Listo, ¿cómo construir la dos? [señala la hoja]
Luis Felipe: Es dos más dos, más uno, entonces ahí dan cinco
Profesora: Tres [señala la hoja]
Luis Felipe: Tres
Profesora: ¿Cuáles tres?, ¿cuáles tres?
Luis Felipe: Tres [Señala tres círculos en la hoja].
Profesora: Tres, ¿y cuáles otros tres?
Luis Felipe: Más tres [Señala tres círculos en la hoja], más uno [señala el círculo restante de la figura].
Profesora: Acá, cuatro.
Luis Felipe: El de cuatro igual. Cuatro.
Profesora: ¿Cuáles cuatro?
Luis Felipe: Estos cuatro [señala cuatro círculos en la hoja].
Profesora: Esos cuatro.
Luis Felipe: Más cuatro [señala otros cuatro círculos en la hoja].
Profesora: Más otros cuatro.
Luis Felipe: Más uno [Señala el círculo restante en la hoja].
Profesora: Más uno. ¿Y la cinco?
Luis Felipe: Cinco [Señala cinco círculos en la hoja], más otros cinco [señala otros cinco círculos en la hoja] más uno [señala el círculo restante de la figura].
Profesora: Ah, OK. Listo, entonces, bueno, mira que el trabajo de Jenny es muy, muy parecido al tuyo. ¿Es igual, cierto?
Jenny: Pero diferente.
Profesora: Pero como es diferente, entonces ¿cómo lo construiste?
Profesor: Pero ¿cómo?, ¿cómo lo construyes tú (…) Jenny?

Profesora: Jenny.
Profesor: Explícale a Luis Felipe ¿cómo lo construyes tú?

Jenny: Bueno, acá la (…) esta frase, ésta carta [señala las instrucciones de la hoja], sí, éste texto dice que acá empezamos con el número uno, pues yo creo, entonces empecé con el número uno y ahí decía que le sumamos uno, entonces pasamos uno acá [señala un círculo de la figura] y otro acá [señala otro círculo] y le sumamos uno acá [señala otro círculo], sería dos. Éste dos [señala dos círculos de la figura] lo pasaba acá para el término dos [con el lápiz simula el movimiento de una figura a otra y señala dos círculos en la segunda figura].
Profesor: ¿Por favor repites eso?, lo último que acabaste de decir.
Profesora: O sea, estos dos (…).
Profesor: No, no. Eso que acabaste de decir, Jenny, ¿qué fue?
Jenny: Que estos dos [señala dos círculos en la primera figura] los pasé acá para el término dos [simula el traslado y señala dos círculos en la segunda figura] y otros dos acá abajo [señala otros dos círculos en la segunda figura] y le sumé uno más [señala el círculo restante]. Y estos tres los pasé acá [señala tres círculos de la segunda figura, con el lápiz simula el movimiento a la tercera figura y señala tres círculos en la tercera figura] y le sumé otro más [señala un círculo] con estos tres que están acá [señala tres círculos de la tercera figura], estos cuatro que están acá los pasé acá[señala cuatro círculos en la tercera figura, simula el traslado y señala cuatro círculos en la cuarta figura], y acá puse otros cuatro [señala cuatro círculos en la figura cuatro] y le sumé uno [señala un círculo]. Y acá estos cinco los pasé acá [señala cinco círculos en la cuarta figura, simula el traslado a la quinta figura, y señala cinco círculos en la quinta figura], y acá pasé otros cinco [señala otros cinco círculos en la quinta figura] y les sumé uno [señala el círculo restante].
Profesor: ¿Tu qué opinas de esa construcción y de esa manera como lo hizo Jenny, Luis Felipe?
Luis Felipe: Que sí, que está bien hecha.
Profesor: ¿Sí?

Septiembre 13 de 2012

Profesor: en este momento iniciamos la sesión número 14 del 13 de septiembre de 2012 haciendo un trabajo sobre entrevistas focalizadas.
[Pausa en el vídeo]
Profesor: A explicarle a tus compañeros y tu compañera cómo construiste la secuencia, ¿por qué se te ocurrió hacerla así?, por favor.
Esneider: Se me ocurrió así porqué así me acordaba, segundo porqué así dice acá [Señala la hoja] y porque como decían que a cada figura se le sumaba el mismo número y al resultado que le dio se le suma uno más entonces por eso hice así
Profesor: ¿Cómo construyes la uno, por ejemplo?
Esneider: a la uno le sumo el mismo número y el resultado q me dé le sumo un uno.
Profesor: La dos… pero ¿por qué comenzaste con la tres?
Esneider: Que la quería hacer en desorden.

Profesor: ¿La quería hacer qué?
EEneider: En desorden.
Profesor: en desorden. Explícanos, explícales como construiste la tres a partir del mensaje [Señala en la hoja].
Esneider: Cogí el tres, le sumé otro tres, y el resultado que me dio le sumé un uno.
Profesor: y ¿por qué la hiciste así y no de otra forma? [señala la hoja].
Esneider: Porqué así era la forma q me acordaba.
Profesor: ¿Así era la forma que te acordabas? Por ejemplo ¿cómo construiste la figura número 5?
Esneider: La misma secuencia pero con el 5, cogí el número 5, le sumé otro 5 y el número que me dio le sumé un uno. [Mueve las manos cada que va diciendo el procedimiento.]
Profesor: Por ejemplo si yo te preguntara o si yo te exigiera que le dijeras a ellos [Señala al grupo] cómo construir la figura 50 pero sin construirla, para saber el número de círculos, ¿cómo lo harías?
Esneider: Pues al 50 le sumo otro 50 y al número que me dio le sumo el 1. [Intenta justificar lo que va diciendo con señas que hace sobre la mesa].
Profesor: ¿y lo harías de esa misma forma? [Señala la hoja de EEsneider]
Esneider: Emm.
Profesor: O sea, con la misma configuración [Intenta representar con las manos arriba y abajo, representando lo que está hablando], digamos arriba, horizontales, ¿sí?
Esneider: Emm no [niega con la cabeza], lo haría de diferente manera.
Profesor: ¿Sí?, ¿de qué forma lo harías?
Esneider: Dos verticales, dos horizontales y dos verticales [dibuja en la mesa con los dedos las líneas horizontales y verticales].
Profesor: ¿Y por qué así?
Esneider: Porque así me queda más fácil y me rinde más.
Profesor: Bueno.
Luis Felipe: Porque le rinde el espacio ja ja ja.
Profesor: Bueno, eh bueno y si yo te preguntara.
[Pausa en el video]
Profesor: Bueno entonces ahora yo te pregunto: tú no sabes el número de la tarjeta, pero sabes que a ese número le sumas el mismo número y luego al resultado le sumas uno, que es el mensaje que estamos mirando [hace señas sobre lo que está hablando y señala la hoja]. Con base en este mensaje tú construyes las secuencias. Si yo te preguntara: una figura, una figura tiene por ejemplo 41 círculos, la pregunta se la hago a él, pero es para todos [señala al grupo], una figura tiene 41 círculos, ¿a qué número de figura corresponde?
Luis Felipe: ¡Yo! [Levanta la mano para responder].
Santiago: Arriba 41 y abajo 42
Esneider: [Levanta la mano para responder] 20.
Luis Felipe: Sí, 20.
Profesor: Él dijo que 20 [señala a Esneider], ¿por qué?

Esneider: Porque 20 sumado con 20 da cuarenta, y si sumamos 1 da 41 [intenta representar lo que está diciendo con las manos sobre la mesa].
Profesor: ¿Cómo dices tú, Santiago? [Señala a Santiago].
Santiago: ¿De qué?, ¿de hacer la secuencia? [Santiago señala la hoja identificando que ahí está la secuencia].
Profesor: Sí lo de (…) horizontal.
Santiago: Arriba 41, abajo 42 [juega con el esfero y baja la cabeza varias veces]
Profesor: No, pero es que la figura es de 41 círculos.
Santiago: Por eso, cuarenta y (…) ¡ah! Ya, ya entendí, 20 arriba y 21 abajo [representa arriba y abajo con las manos].
Profesor: ¿Y a qué número de figura corresponde entonces?
Santiago: Emm al 20 [blanquea los ojos mientras piensa].
Profesor: Al 20, ¿tú qué piensas?
Lorena: Que sí [la niña asiente con la cabeza].
Profesor: Por ejemplo si yo te preguntara a ti una figura de esta, con respecto a este mensaje, una figura tiene 163 círculos [el profesor la señala].
Santiago: No, se muere porque pa' que cuente todo eso ja ja ja (risa general) [golpea sutilmente la mesa].
Profesor: 163 círculos.
Luis Felipe: Yo sé profe.
Profesor: ¿A qué número de figura …? cómo lo haces?
Luis Felipe: 82 [Señala la hoja].
Profesor: Explícales a ellos cómo lo haces, explícales acá [le alcanza una hoja y un lápiz].
Luis Felipe: pues divido rápido y ya [toma el lápiz].
Profesor: Explícales acá, explícale acá cómo lo haces [señala la hoja].
Luis Felipe: Cuánto es que era 163 [empieza a escribir en el papel lo que ya había hecho mentalmente].
Luis Felipe: Con calculadora.
Profesor: Sí, también.
Luis Felipe: Con la calculadora de la mente.
Profesor: Luis Felipe, tú los vas a convencer de esto.
Luis Felipe: por eso, mire: 163, pero de todos modos le tengo que restar uno [borra el 3 y lo reemplaza por un 2].
Santiago: Baa.
Luis Felipe: Ay sí, pero me hicieron confundir, bueno ya le resté uno, ese uno es el, bueno ya, el uno ahorita ya va después, después lo divido en 2, que me da 8, 1 [Va realizando el algoritmo de la división en la hoja] a esa 0, 0, 0.
Profesor: O sea que el número de la figura es, ¿qué? de 81
Luis Felipe: 81.
Profesor: Explícales tú, Yaneth, a todos y a todas cómo fue que lo hiciste y si adviertes algún error ahí, explícales. Primero miren la secuencia que hizo ella [muestra la hoja a

todos los de la mesa], entonces Yaneth les va a explicar cómo lo hizo, cómo procedió, duro hija, así, lo mismo que nos dijiste.
[Yaneth se tapa la cara con las manos]
Profesor: Por ejemplo, ¿cómo construiste la número 1 [señala la hoja y luego vuelve a señalar al grupo. Luego señala la hoja para mostrar al grupo lo que Yaneth había hecho, mientras tanto Luis juega con un lápiz. Como la niña se puso nerviosa y se tapa la cara con ambas manos entonces el profesor hace señas para parar el video]
[Pausa en el vídeo]
Profesor: Entonces nos explicas como construyó la figura a través del mensaje, la secuencia
Jenny: yo creo, como acá dice que uno le suma uno, entonces yo pensé, bueno creí que era el número uno y ese número, lo bajé abajo y acá hice que le sumáramos uno y se lo bajé y quedó el dos, este mismo 2 lo pase acá y le sume otro acá para que quedara el 3, y este 3 lo pase acá y le sumé otro para que quedara el 4, y este 4 lo pase acá, le sumé uno y quedó el 5, el 5 lo pasé acá, le sumé 1 y quedó el 6 [señala los círculos dando las razones del porqué los dibujos que están en su hoja dando una representación gráfica de las instrucciones del taller]
Profesor: Y si yo te preguntara cómo construir la figura número 50, ¿cómo lo haces?
Luis Felipe: ¡Yo!
Jenny: ¿la figura número 50?
Profesor: 50, sí.
Jenny: Pues yo haría 50 círculos o números, haría cincuenta círculos y abajo le sumaría 1, 51 y así sucesivamente [señala la hoja manifestando que dibujaría 50 círculos y en el renglón de abajo 51]
Profesor: O sea, 50 arriba y abajo ¿cuánto te quedaría?
Jenny: 51.
Profesor: 51, y ¿con base a la que hizo Esneider no la ves?
Luis Felipe: Sí, ¡yo!
Profesor: Porque Esneider tiene otra configuración, ¿cómo ves la de Esneider?
Jenny: yo la veo que por ejemplo el término 3, el colocó 3 círculos abajo [señala con el lápiz en línea horizontal] y le suma uno arriba [señala con el lápiz el gesto hacia arriba], más los 3 círculos de acá, [Señala con el lápiz un punto en específico de la hoja, la hoja de Jenny la giró de tal manera que el profesor la pudiese ver correctamente].
Profesor: Bueno, ahora explícanos tú a todos como la construiste tú, hijo, perdón hijo. Dime Luis [Le da la palabra a Luis Felipe que estaba levantando la mano]
Luis Felipe: Profe, pero yo creo que eso está mal hecho [Señala con el lápiz una hoja]
Profesor: ¿Esa está mal hecha? ¿Por qué?
Luis Felipe: Porque si, por ejemplo, la ¿cuál es? la 4 ¿no? [inicia a dibujar cuatro círculos de forma horizontal y deja un espacio como para otra bolita entre la segunda y tercera bola en su hoja] era 1, 2, bueno no se entiende.
Esneider: Y así son todos.

Luis Felipe: Entonces cuatro para arriba, uno, dos, tres y cuatro [El estudiante dibuja cuatro círculos de abajo hacia arriba].
Esneider: Más la que le sumo [Señala la hoja de Luis].
Luis Felipe: Más la que le sumo, pero yo se la sumaria acá abajo [Señala el dibujo que acabó de hacer], donde este es abajo el que me ayuda.
Esneider: Pero yo se lo sumo arriba.
Luis Felipe: Porque, 5 y 5 [Señala los 5 círculos horizontales y los 5 círculos verticales] porque este me da el 5 acá [Señala los círculos horizontales] y 5 acá [señala los 5 círculos verticales] por eso digo que está mal.
Profesor: ¿tú qué dices Esneider?
Esneider: No sé, igualmente yo se la sumé arriba [señala en su hoja el círculo que está arriba en su dibujo].
Profesor: pero por ejemplo la figura 2 tiene 3 horizontales [señala la figura 2 en la hoja de Esneider], 2 verticales daría 5, estaría bien, ¿sí?
Estudiante: Sí, esa está bien, profe.
Profesor: La figura 4, 4 verticales, 4 horizontales y ¿cuántas verticales? [Señala en la hoja de Esneider la figura 4].
Esneider: 5.
Profesor: 1, 2, 3, 4, 5, o sea, 9
Luis Felipe: No, profe pero yo digo que eso está mal porque mire [señala el dibujo de Esneider] la gracia seria que quedaría 5 acá [Señala las círculos horizontales del dibujo de Esneider], por ejemplo si es la 4 quedaría 5 acá y 5 acá, pero 4 y acá 6 para abajo [Señala los 4 círculos horizontales y los 6 verticales].
Esneider: Cinco.
Luis Felipe: porque siempre va haber un círculo que la va a conectar
Jenny: yo también pienso que esa está mal.
Luis: En la primer, la primera vez que vinimos acá, esa vez vimos que siempre va a haber un círculo que la interconectaba [señala en su dibujo el círculo en común entre las verticales y horizontales] a estos para que diera 5 a esta también… la primera vez que vinimos.
Profesor: Bueno, muy bien Luis, a ver, explícanos tu [Señala la hoja de Lorena].
Jenny: (…) Acá cogí 1, y le sumé otro, y le sumé otro, y me dio 3 [señala el primer dibujo de su hoja con el lápiz, mostrando cada círculo].
Profesor: Por ejemplo, ¿cómo construyes la 5?
Jenny: 5 le sumo 5 y la sumo [señala el quinto dibujo de su hoja].
Docente: Ehh (…) ¿Y esta configuración la aceptas?, ¿o sea, te parece bien? [Señala la hoja de Esneider], ¿satisface el mensaje?, ¿o crees que la tuya es la que…? o sea la configuración, cuando yo digo configuración es la manera como ustedes acomodan los círculos, por ejemplo Esneider, acomodó círculos verticales, círculos horizontales. [Hace señas con la mano vertical y horizontalmente]. En el caso de Felipe [señala la hoja de

Felipe] fueron círculos horizontales. En el caso tuyo [Señala la hoja de Jenny] fueron filas también horizontales, sí, ¿tú crees que así funciona también o lo ves más difícil?
Lorena: Más difícil.
Profesor: Más difícil, es mejor como las horizontales como dice Felipe, hay que acomodar aquí de tal manera que no contar 2 veces.
Lorena: Sí.
Profesor: Pero las filas horizontales y las filas (…) o sea ¿tener 2 filas horizontales para ti es más fácil?, por ejemplo ¿cómo construyes la figura número 85000?, o sea ¿cuántos círculos tendría? porque no la vas a construir, nunca terminamos ¿cuántos círculos tendría la figura?, o sea ¿cómo haces para calcular el número de círculos?
Lorena: Sumar 85000, 85000 (…) [con el lápiz mueve la hoja y le responde al profesor al mismo tiempo].
Santiago: Profe, yo.
Profesor: Y si una figura tiene, una figura tiene 264 círculos esa figura, es una figura de esta secuencia, ¿tú que dices Jenny?
Jenny: ¿de ésta?
Profesor: Sí.
Jenny: Pues (…).
Profesor: 264 círculos
Jenny: No sé, es que se puede de las dos formas.
Luis Felipe: [levanta la mano] pero, pero
Jenny: Pero es más fácil ésta, serían doscientos treinta y ¿qué?
Profesor: Jenny digamos que una figura de esta secuencia, vamos a ver, tiene 264 círculos, ¿sí es una figura de esa secuencia o no?, ¿tú que dices?, 264 círculos ¿cómo haríamos para mirar cual era el número de la figura?
Luis Felipe: [Levanta ligeramente la mano] profe, profe.
Jenny: Pues sería como dice Felipe, dividiendo
Profesor: Házmelo acá por fa [señala la hoja de la niña]
Luis: No profe, venga le digo una cosa, pero eso no, yo digo que no
Docente: abstiene ahí y ahora miramos.
Luis: Yo digo que no porque…
Profesor: Espérate, espérate. A ver, 264.
Jenny: [inicia a escribir en la hoja] Eh, bueno toca quitarle uno a éste [borra el 4 de 264 y lo reemplaza por un 3] entonces este queda en tres, entonces 1x2, 2 al 3,1 y [se queda mirando la hoja y moviendo el lápiz].
Docente: Entonces (…).
Jenny: Entonces ahí, entonces yo creo que da 131 [señala una división en su hoja de manera circular con el lápiz], pero aquí no me dio cero, entonces sería 132 [mira al profesor a ver qué le dice].
Luis Felipe: ¡Yo, yo, yo! [levanta la mano].
Profesor: mjm. ¿Qué dices tú? [Le da la palabra a Luis Felipe].

Luis: Que no. [Hace estos con su brazo representando total negación].
Profesor: ¿Por qué no?
(Varios estudiantes hablan al mismo tiempo)
Santiago: Dividir 264.
Luis: Porque, por ejemplo, ¿cuánto? 264 [Señala la hoja de Jenny] y para poder hacer ese número se necesita un par y como termina en 3 [señala la hoja de Jenny]
Profesor: Pero que es la misma razón que tu estas encontrando [señala a Jenny], o sea, el procedimiento que a ti te llevo te dijo: ¡uy!, pero espere debería ser 132, y es muy similar a la razón que da Felipe.
Jenny: Sí.
Profesor: Sí.